Année 2007-2008

Choix de Portefeuille

Christophe Boucher

Chapitre 3. La gestion de portefeuille moyenne-variance

$\Rightarrow$ L'agent cherche à obtenir un rendement maximum pour un risque minimum.

$\Rightarrow$ hypothèses assez restrictives

$\Rightarrow$ succès malgré ses limites : analyse intuitive, simple avec de nombreuses extensions et applications

$\Rightarrow$ déterminer des portefeuilles qui pour une espérance de rendement donnée offrent le moins de risque (=la frontière efficiente).

Ensuite l'agent choisit sur la frontière efficiente le portefeuille qui maximise sa satisfaction.

Ce choix va dépendre de manière cruciale de son degré d'aversion pour le risque.

3.1. L'analyse moyenne-variance

3.1.1. Les conditions usuelles

A) Fonction d'utilité quadratique

maximisation de l'espérance d'utilité $\Rightarrow$ deux premiers moments.

$$u(W) = a + bW + cW^2 \qquad b > 0 \qquad c < 0$$

$$E\left[u(W)\right] = a + bE\left[W\right] + cE\left[W^2\right]$$

$$E\left[u(W)\right] = a + bE\left[W\right] + c\left[Var(W) + E\left[W\right]^2\right]$$

MAIS fonction d'utilité quadratique $\Rightarrow$ AAR augmente avec W

B) Les rendements sont distribués normalement

Si normalité : distribution entièrement caractérisé par la moyenne et la variance.

MAIS problèmes de skewness et kurtosis

3.2. La gestion de portefeuille dans le cas de deux actifs

3.2.1. Mesure du risque et du rendement d'un portefeuille de deux titres

$$E(R_P) = E(xR_1 + (1-x)R_2) = xE(R_1) + (1-x)E(R_2)$$

$$V(R) = E\left[(R - E(R))^2\right] = E(R^2) - (E(R))^2$$

$$\sigma(R) = \sqrt{V(R)}$$

$$V(R_p) = E(R_P{}^2) - (E(R_P))^2 = x^2V(R_1) + (1-x)^2V(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2)$$

$$V(R_p) = x^2V(R_1) + (1-x)^2V(R_2) + 2x(1-x)\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)$$

$$Cov(R_1, R_2) = E\left[(R_1 - E(R_1)(R_2 - E(R_2)\right] = E\left[R_1 \times R_2\right] - E(R_1)E(R_2)$$

Le coefficient de corrélation = $Cov(R_1, R_2)/\sigma(R_1)\sigma(R_2)$.

3.2.2. Calcul du portefeuille de variance minimal

$$\frac{d\mathrm{V}(R_P)}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xV(R_1) + 2xV(R_2) - 2V(R_2) + 2\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2) - 4x\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2) = 0$$

$$x = \frac{V(R_2) - \sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)}{V(R_1) + V(R_2) - 2\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)}$$

Exemple

Considérons les rendements possibles des titres A et B :

Évènements	Probabilités	A	B
1	¼	0%	30%
2	¼	5%	20%
3	¼	15%	0%
4	¼	20%	-10%

$$E(R_A) = \frac{1}{4}(0\% + 5\% + 15\% + 20\%) = 10\% = E(R_B)$$

$$V(R_A) = \frac{1}{4}\left[(0\%)^2 + (5\%)^2 + (15\%)^2 + (20\%)^2\right] - 0,1^2 = 0,0063$$

$$V(R_B) = \frac{1}{4}\left[(30\%)^2 + (20\%)^2 + (0\%)^2 + (-10\%)^2\right] - 0,1^2 = 0,025$$

$$\sigma(R_A) = 0,079$$
$$\sigma(R_B) = 0,158$$
$$COV(R_A, R_B) = \frac{1}{4}\left[(0,00)(0,3) + (0,05)(0,2) + (0,2)(-01)\right] - 0,1^2 = -0,0125$$

$Corr(R_A, R_B) = \dfrac{-0,0125}{0,079\text{x}0,158} = -1$: les actifs sont parfaitement négativement corrélés

Nous pouvons calculer l'espérance et la variance d'un portefeuille équipondéré ($x = 0,5$).

Évènements	Probabilités	Portefeuille équipondéré
1	¼	0,5 x 0% + 0,5 x 30% = 15%
2	¼	12,5%
3	¼	7,5%
4	¼	5%

$$E(R_P) = 0,1$$
$$V(R_P) = \frac{1}{4}\left[(15\%)^2 + (12,5\%)^2 + (7,5\%)^2 + (5\%)^2\right] - 0,1^2 = 0,0016$$

ou bien

$$V(R_P) = (0,5^2)(0,0063) + (0,5^2)(0,025) + 2\text{x}0,5\text{x}0,5\text{x}(-1)(0,079)(0,158) = 0,0016$$

soit $\boldsymbol{\sigma}(R_P) = 0,067$

<u>Portefeuille de Variance minimale :</u>

$$x = \frac{V(R_2) - \boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1, R_2)}{V(R_1) + V(R_2) - 2\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1, R_2)}$$

$$x = \frac{0,025 - 0,079\text{x}0,158\text{x}(-1)}{0,0063 + 0,025 - 2\text{x}0,079\text{x}0,158\text{x}(-1)} = \frac{2}{3}$$

$$V(R_P) = (0,67^2)(0,0063) + (0,33^2)(0,025) + 2\text{x}(0,67)\text{x}(0,33)\text{x}(-1)(0,079)(0,158) = 0$$

3.2.3. Caractéristiques des portefeuilles et corrélation entre les actifs

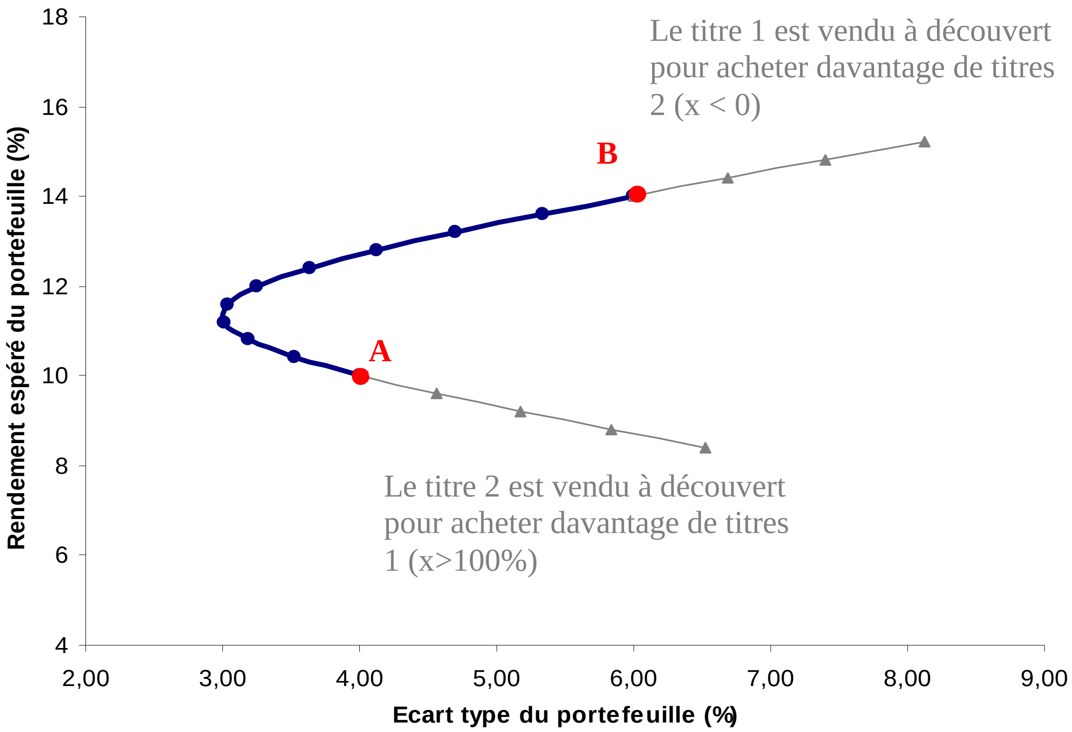
Le risque d'un portefeuille est en effet inférieur à la simple combinaison linéaire des risques des actifs élémentaires.

Le gain en terme de risque lié à la diversification dépend du niveau du coefficient de corrélation entre les rendements des actifs.

A) Cas général

Nous avons représenté sur ce graphique les portefeuilles possibles pour un cœfficient de corrélation entre les actifs de –0,2 et pour des titres dont les caractéristiques sont les suivantes :

	Rendement en %	Écart type en %
Titre 1	10	4
Titre 2	14	6

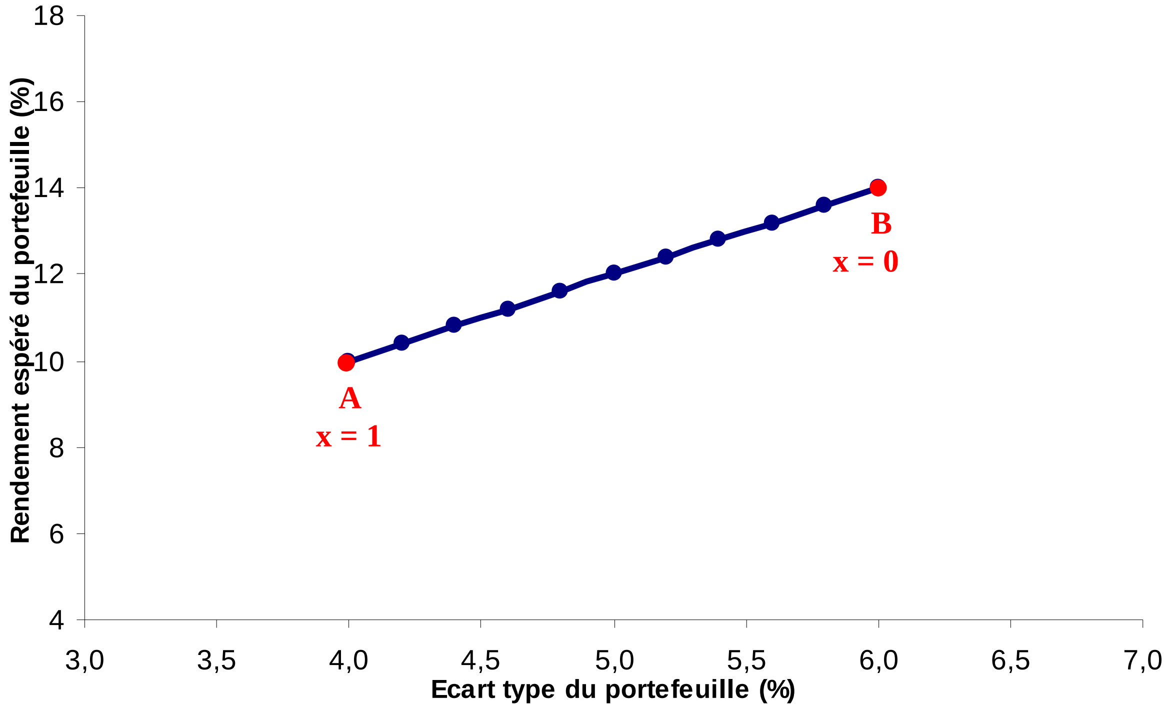


B) Cas particuliers

1er cas : $Corr(R_1, R_2) = 1$

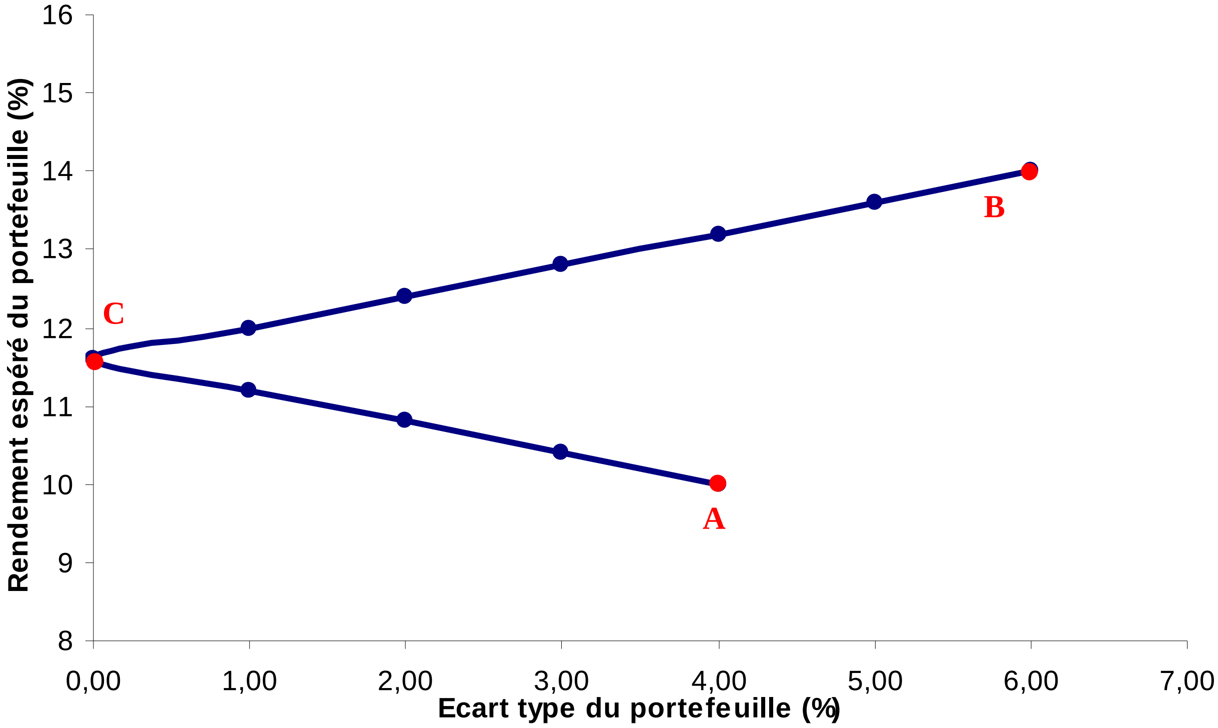
$$V(R_p) = x^2 V(R_1) + (1-x)^2 V(R_2) + 2x(1-x)\sigma(R_1)\sigma(R_2)$$

$$V(R_p) = \left[x\sigma(R_1) + (1-x)\sigma(R_2)\right]^2$$

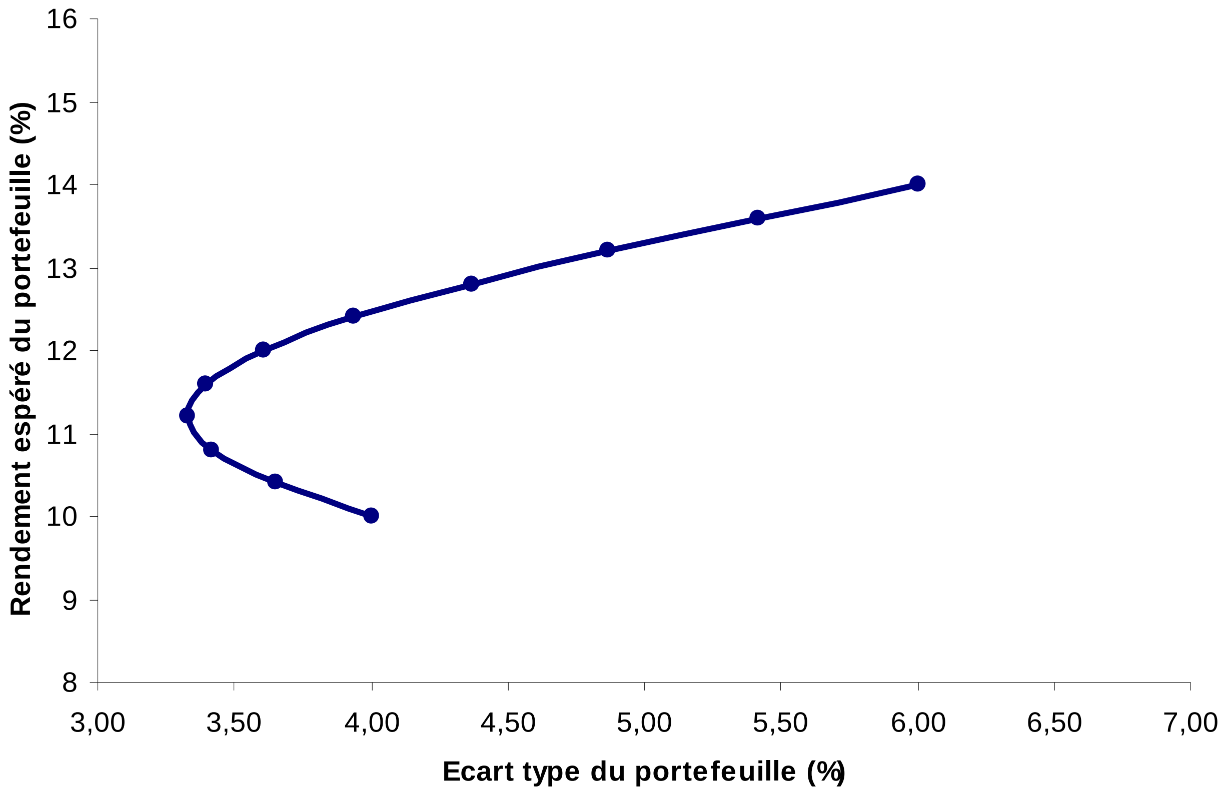


2ème cas : $Corr(R_1, R_2) = -1$

$$V(R_p) = \left[x\sigma(R_1) - (1-x)\sigma(R_2)\right]^2$$

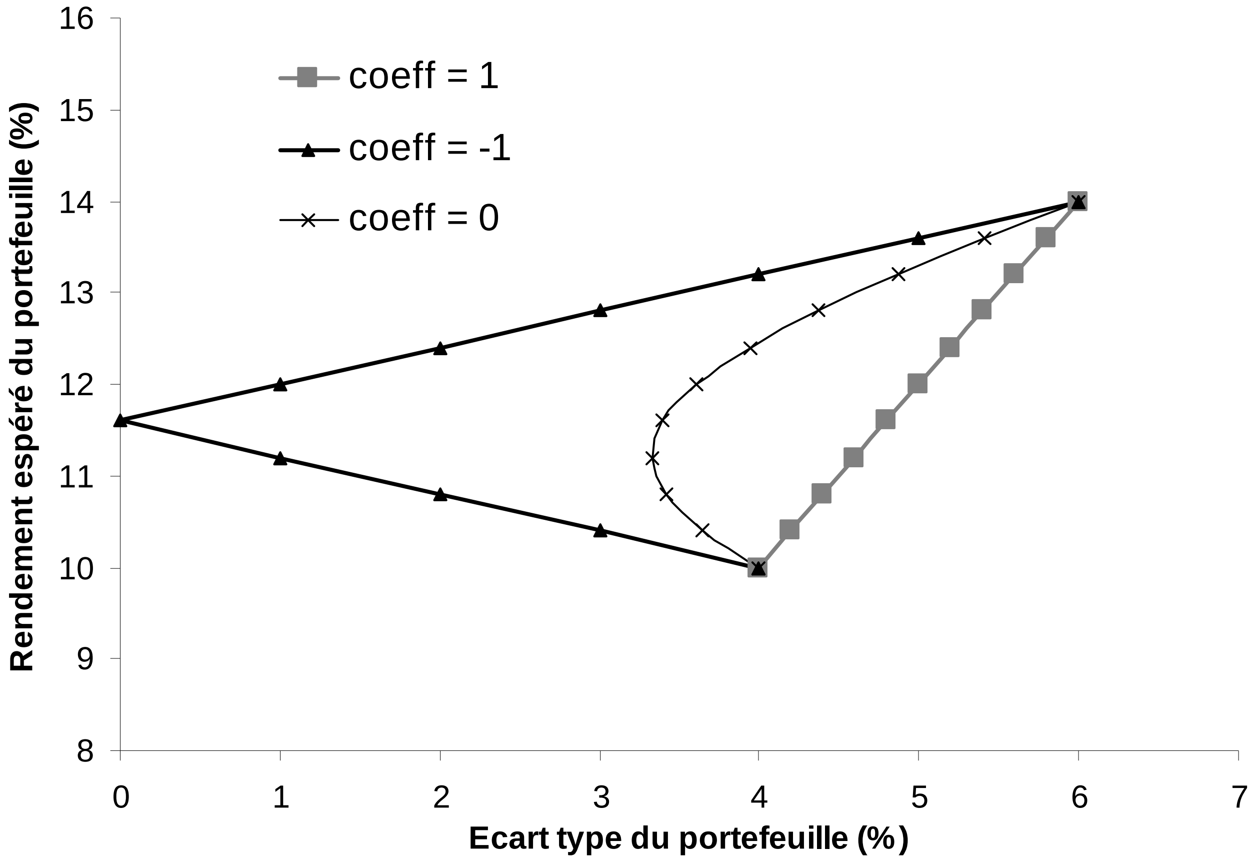


3ème cas : $Corr(R_1, R_2) = 0$



Synthèse :

Les frontières efficientes sont représentées par la partie de chaque courbe au dessus de point de variance minimale.



C) Introduction de l'actif sans risque

Rendement de l'actif sans risque : R_f

Non seulement $\boldsymbol{\sigma}_{R_f} = 0$ mais $Corr(R_1, R_f) = 0$

$$E(R_P) = xE(R_1) + (1 - x)R_F$$
$$V(R_P) = x^2 V(R_1)$$

$$E(R_P) = R_F + x\left[E(R_1) - R_F\right]$$

$$x = \frac{\sigma(R_P)}{\sigma(R_1)}$$

La droite de marché (*Capital Market Line* -CML- ou droite de marché du capital) d'équation :

$$E(R_P) = E(R_f) + \frac{E(R_1) - Rf}{\boldsymbol{\sigma}(R_1)}\boldsymbol{\sigma}(R_P)$$

La pente de cette droite est une constante qui ne dépend pas de *x*.

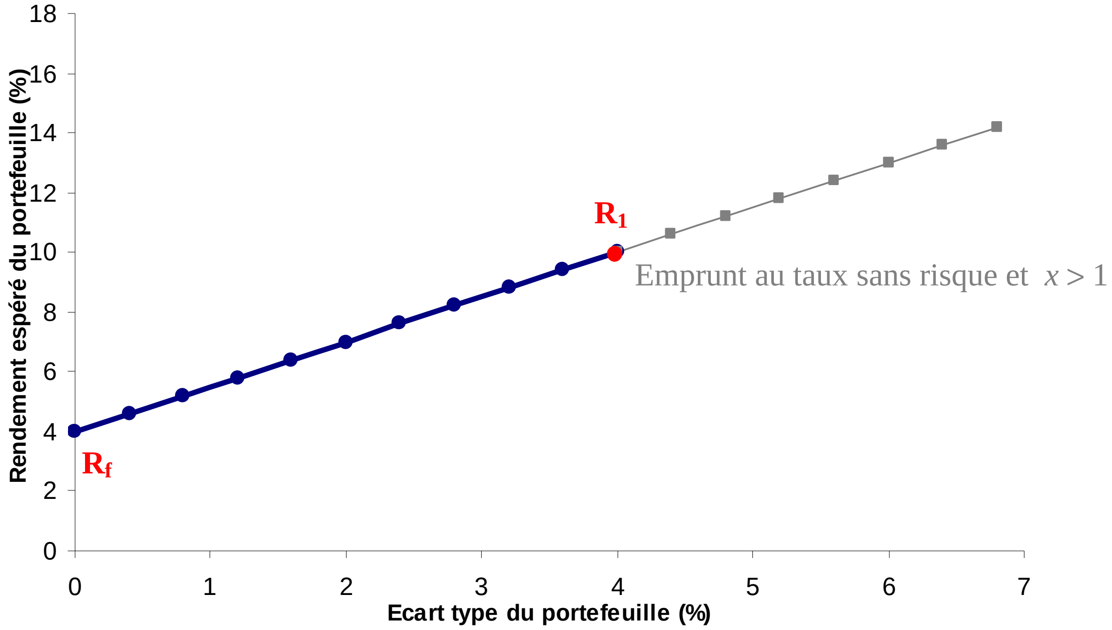
Exemple

L'actif sans risque a un rendement de 4%.
L'actif risqué est caractérisé par :

$E(R_1) = 10\%$
$\sigma(R_1) = 4\%$

x	$E(R_P)$	$\sigma(R_P)$
-2	-8%	8%
-1,5	-5%	6%
-1	-2%	4%
-0,5	1%	2%
0	4%	0%
0,5	7%	2%
1	10%	4%
1,5	13%	6%
2	16%	8%

Les portefeuilles avec vente à découvert de l'actif risqué sont dominés.



D) Théorème de séparation des fonds :

même portefeuille d'actifs risqués pour tout le monde

L'optimisation du portefeuille avec un actif sans risque s'analyse ainsi comme un processus en deux étapes :

- optimisation du portefeuille de titres risqués (même composition pour tous les agents)
- combinaison optimale entre le portefeuille de titre risqués et l'actif sans risque propre à chaque agent.

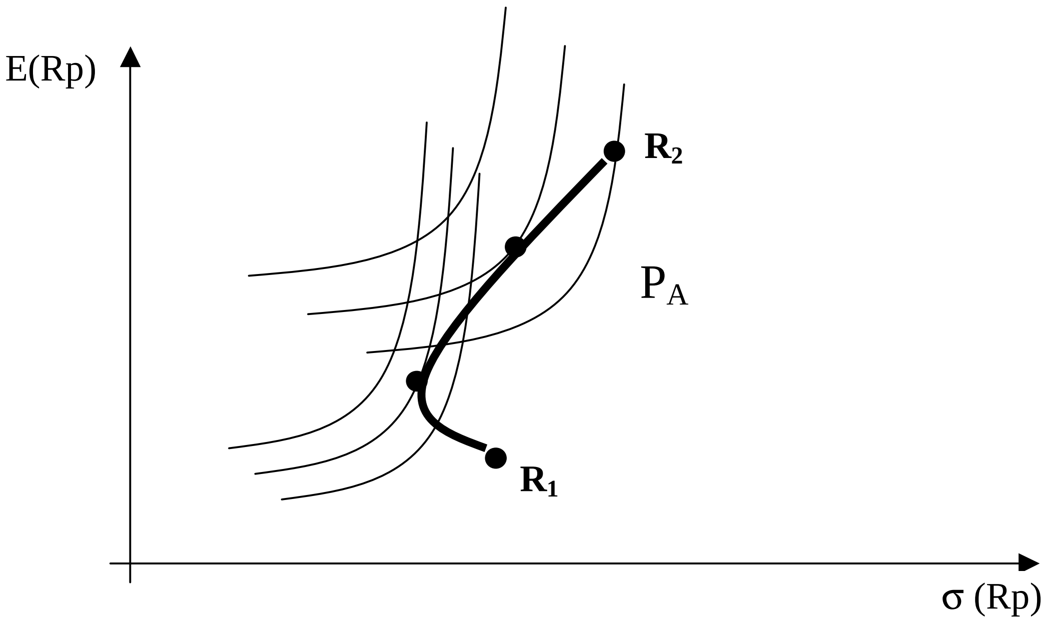
Rq : l'introduction d'un actif sans risque améliore la relation rendement-risque pour tous les agents quelles que soient leurs préférences.

E) Choix du portefeuille optimal

$\Rightarrow$ point de tangence entre la courbe qui relie les titres et une courbe d'indifférence.

La sélection du portefeuille optimal $\Rightarrow$ fonction de son aversion pour le risque.

l'agent A a moins d'aversion au risque que l'agent B



3.3. Calcul des frontières efficientes

Les frontières efficientes donnent la relation entre le rendement et le risque des portefeuilles dominants.

Elles permettent de connaître les meilleurs rendements qu'un investisseur peut attendre pour le niveau de risque qu'il a choisi.

Deux catégories de frontières efficients doivent être distinguées :

- celles construites uniquement à partir d'actifs risqués
- celles construites par la combinaison d'actifs risqués et d'un actif sans risque

3.3.1. Frontière efficiente avec un actif sans risque

La gestion de portefeuille est monopériodique

Le taux sans risque est un taux qui correspond à la période de stabilité de la structure de portefeuille.

A) Notations

$$R = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_N) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{11} \cdots \boldsymbol{\sigma}_{1N} \\ \vdots \quad (\boldsymbol{\sigma}_{ij}) \quad \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{N1} \cdots \boldsymbol{\sigma}_{NN} \end{bmatrix}$$

$E(R_P) = R^T X = X^T R$

$V(R_P) = X^T \Omega X$

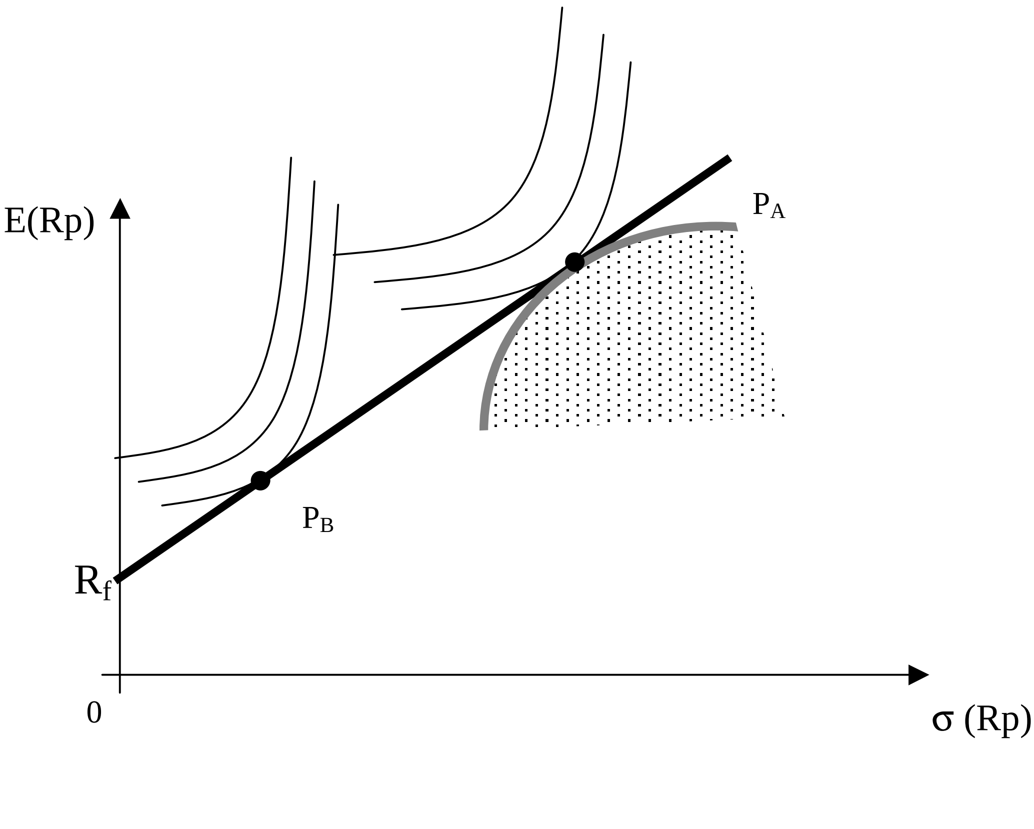
B) Calcul de la frontière efficiente avec un actif sans risque

FE = une droite.

⇒ rechercher l'équation de la frontière efficiente sans actif sans risque.

⇒ chercher la droite d'ordonnée à l'origine R_f et qui est tangente à la frontière efficiente.

L'actif sans risque améliore donc la relation rendement/risque des investissements de tous les agents de l'économie.



Résolution

$\Rightarrow$ maximiser la pente de la droite passant par R_f compte tenu des actifs risqués existants.

$$E(R_P) = (1 - x_M)R_f + x_M E(R_M)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(R_P) = \sqrt{(1 - x_M)^2 \boldsymbol{\sigma}(R_f)^2 + (x_M)^2 \boldsymbol{\sigma}(R_M)^2 + 2x_M(1 - x_M)\boldsymbol{\sigma}(R_f, R_M)}$$

$$x_M = \frac{\boldsymbol{\sigma}(R_P)}{\boldsymbol{\sigma}(R_M)}$$

$$E(R_P) = (1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}(R_P)}{\boldsymbol{\sigma}(R_M)})R_f + \frac{\boldsymbol{\sigma}(R_P)}{\boldsymbol{\sigma}(R_M)} E(R_M) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\boldsymbol{\sigma}(R_M)} \boldsymbol{\sigma}(R_P)$$

Le programme:

Max $\Theta = \dfrac{E(R_M) - R_f}{\sqrt{V(R_M)}}$ sous la contrainte : $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$

$$R_f = \sum_{i=1}^{N} x_i R_f$$

Le programme revient à :

Max $\Theta = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i (R_i - R_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \boldsymbol{\sigma}_{ij}}} = X^T (R - R_f) \left[X^T \Omega X \right]^{-1/2}$

La condition de premier ordre est :

$$\frac{d\Theta}{dX} = (R - \overline{R_f}) \left[X^T \Omega X \right]^{-1/2} + \left[X^T (R - \overline{R_f}) \right] (-\frac{1}{2}) 2\Omega X \left[X^T \Omega X \right]^{-3/2} = 0$$

$$(R - \overline{R_f}) + \left[X^T (R - \overline{R_f}) \right] (-\frac{1}{2}) 2\Omega X \left[X^T \Omega X \right]^{-1} = 0$$

En posant $\boldsymbol{\lambda} = \left[X^T (R - \overline{R_f}) \right] \left[X^T \Omega X \right]^{-1}$,

$$(R-\overline{R}_f)-\boldsymbol{\lambda}\Omega X=0$$

En posant également :

$$\boldsymbol{\lambda} X=Z$$

$$(R-\overline{R}_f)=\Omega Z$$

Soit de manière développée :

$$\begin{cases} R_1-R_f=Z_1\boldsymbol{\sigma}_{11}+Z_2\boldsymbol{\sigma}_{12}+\ldots+Z_N\boldsymbol{\sigma}_{1N} \\ R_2-R_f=Z_1\boldsymbol{\sigma}_{21}+Z_2\boldsymbol{\sigma}_{22}+\ldots+Z_N\boldsymbol{\sigma}_{2N} \\ \vdots \\ R_N-R_f=Z_1\boldsymbol{\sigma}_{N1}+Z_2\boldsymbol{\sigma}_{N2}+\ldots+Z_N\boldsymbol{\sigma}_{NN} \end{cases}$$

$$X_i=\frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{N} Z_i}$$

car $\sum_{i=1}^{N} X_i\boldsymbol{\lambda}=\sum_{i=1}^{N} Z_i \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}=\sum_{i=1}^{N} Z_i$

Nous pouvons calculer $E(R_M)$ et $\boldsymbol{\sigma}(R_M)$

$$E(R_P)=R_f+\frac{E(R_1)-Rf}{\boldsymbol{\sigma}(R_1)}\boldsymbol{\sigma}(R_P)$$

C) Calcul de la frontière efficiente sans actif sans risque

FE = courbe de second degré.

$\Rightarrow$ trouver pour chaque valeur de l'espérance de rendement du portefeuille, la composition du portefeuille qui permet d'obtenir le risque minimum.

$$\text{Min}\,\frac{1}{2}X^T\Omega X$$

sous les conditions $\begin{cases} X^T\overline{R} = E(R_P) \\ X^T\overline{1} = 1 \end{cases}$

$$\pounds = \frac{1}{2}X^T\Omega X + \lambda\left[E(R_P) - X^T\overline{R}\right] + \gamma\left[1 - X^T\overline{1}\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\pounds}{dX} = \Omega X - \lambda\overline{R} - \gamma\overline{1} = 0 \\ \dfrac{d\pounds}{d\lambda} = E(R_P) - X^T\overline{R} = 0 \\ \dfrac{d\pounds}{d\gamma} = 1 - X^T\overline{1} = 0 \end{cases}$$

$$X = \Omega^{-1}\left(\lambda\overline{R} + \gamma\overline{1}\right)$$

et en multipliant cette expression par $\overline{R}^T$ et par $\overline{1}^T$, on obtient :

$$\overline{R}^T X = \overline{R}^T\Omega^{-1}\left(\lambda\overline{R} + \gamma\overline{1}\right) = E(R_P)$$

$$\overline{1}^T X = \overline{1}^T\Omega^{-1}\left(\lambda\overline{R} + \gamma\overline{1}\right) = 1$$

Définissons les scalaires :

$$A = \overline{1}^T\Omega^{-1}\overline{R} = \overline{R}^T\Omega^{-1}\overline{1}$$
$$B = \overline{R}^T\Omega^{-1}\overline{R}$$
$$C = \overline{1}^T\Omega^{-1}\overline{1}$$
$$D = BC - A^2$$

Des équations précédentes, on tire alors :

$$\lambda = \frac{B - AE(R_P) - A}{D}$$

$$\gamma = \frac{B - AE(R_P)}{D}$$

et en substituant dans $X = \Omega^{-1}\left(\lambda\overline{R} + \gamma\overline{1}\right)$, on obtient :

$$X = g + hE(R_P)$$

avec

$$g = \frac{B\Omega^{-1}\overline{1} - A\Omega^{-1}\overline{R}}{D}$$

$$h = \frac{C\Omega^{-1}\overline{R} - A\Omega^{-1}\overline{1}}{D}$$

En posant $E(R_P) = 0$, $g \Rightarrow$ proportions optimales d'un portefeuille d'espérance de rendement nulle.

En posant $E(R_P) = 1$, $X = g + h \Rightarrow$ proportions optimales d'un portefeuille d'espérance de rendement égale à 1.

La FE possède la double propriété :

1) toute combinaison linéaire de deux portefeuilles efficients est un portefeuille efficient ;

2) toute la frontière efficiente peut être générée en combinant linéairement deux portefeuilles efficients différents quelconques.

Pour trouver la structure d'un portefeuille efficient d'espérance de rendement $E(R_1)$: $\left[1 - E(R_1)\right]$ du portefeuille g et $E(R_1)$ du portefeuille $g + h$.

La structure du portefeuille est alors de la forme :

$\left[1 - E(R_1)\right] g + E(R_1)(g + h) = g + hE(R_1)$.

Exemple :

Période : novembre 1997-octobre 2007 (données mensuelles) :

	Rendement	Ecart type	France	EU	Asie x-J
MSCI France	0,89%	5,60%	1	0,578	0,513
MSCI EU	0,53%	4,30%		1	0,656
MSCI Asie sauf Japon	1,09%	6,27%			1

Vous êtes un investisseur européen et vous vous couvrez intégralement contre le risque de change. Vous raisonnez donc en monnaie locale et on ignore le coût de la couverture.

1) Donnez les proportions des portefeuilles efficients d'espérance de rendement 0 et 1.
2) Comment composez-vous votre portefeuille si votre objectif est une espérance de rendement de 0,75% (environ 9% annuel).
3) Quelle est l'équation de la frontière efficiente

Correction :

1) Commençons par calculer la matrice des variances covariances :

$$\begin{pmatrix} 0{,}0031 & 0{,}00139182 & 0{,}001801246 \\ 0{,}00139182 & 0{,}0018 & 0{,}001768642 \\ 0{,}00180125 & 0{,}00176864 & 0{,}0039 \end{pmatrix}$$

Son inverse est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 516{,}312 & -297{,}476 & -103{,}558 \\ -297{,}474 & 1173{,}470 & -394{,}776 \\ -103{,}560 & -394{,}774 & 483{,}270 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons calculer les scalaires :

A = 3,4122
B = 0,037509
C = 581,43
D = 10,165

On sait que :

$$X = g + hE(R_P)$$

avec

$$g = \frac{B\Omega^{-1}\overline{1} - A\Omega^{-1}\overline{R}}{D}$$

$$h = \frac{C\Omega^{-1}\overline{R} - A\Omega^{-1}\overline{1}}{D}$$

Nous pouvons déterminer la composition du portefeuille d'espérance de rendement nulle :

$$X_0 = g = \begin{bmatrix} -0,209 \\ 2,0211 \\ -0,8121 \end{bmatrix}$$

La composition du portefeuille d'espérance de rendement égale à un est donné par :

$$X_1 = g + h = \begin{bmatrix} 69,1857 \\ -201,3343 \\ 133,1485 \end{bmatrix}$$

2)

$$X_{0,0075} = g + 0,0075h = \begin{bmatrix} 0,3115 \\ 0,4959 \\ 0,1926 \end{bmatrix}$$

La structure du portefeuille permettant d'atteindre l'objectif cible de rendement (0,75%) consiste à investir : 31,15% en France ; 49,59% aux États-Unis et 19,26% en Asie.

On vérifie bien :
$\overline{R}^T X = 0,0075$
Nous pouvons calculer le risque de ce portefeuille :
$V(R_P) = X^T \Omega X = 0,0019$

3) L'équation de la frontière efficiente est de la forme :

$$V(R_P) = aE(R_P)^2 + bE(R_P) + c$$

Les trois points des trois portefeuilles se situant sur la frontière efficiente vont nous permettre de trouver les trois coefficients *a, b* et *c*.

Le système à résoudre est le suivant:

$$\begin{cases} 0 \times a + 0 \times b + c = V(R_0) \\ a + b + c = V(R_1) \\ E(R_{0,0075})^2 \times a + E(R_{0,0075}) \times b + c = V(R_{0,0075}) \end{cases}$$

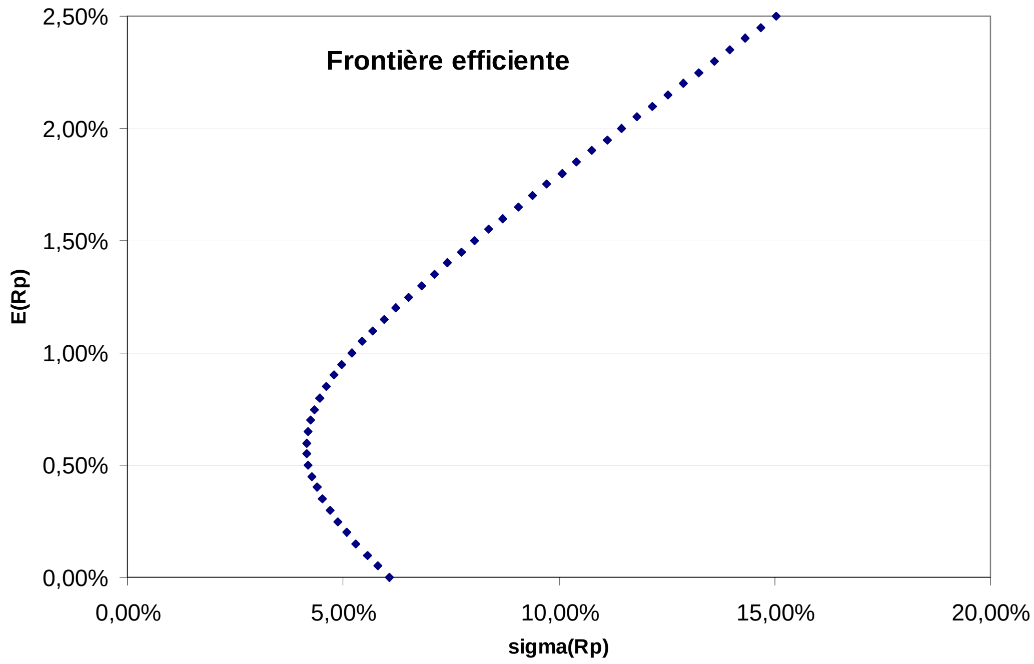
Le risque de chacun des trois portefeuilles précédents se calcule par le produit matriciel suivant : $X^T \Omega X$.

Il convient donc de résoudre :

$$\begin{cases} 0 \times a + 0 \times b + c = 0,0036898 \\ a + b + c = 56,5301 \\ 0,0075^2 \times a + 0,0075 \times b + c = 0,0018721 \end{cases}$$

On en déduit l'équation de la frontière efficiente :

$$V(R_P) = 57,198E(R_P)^2 - 0,0671E(R_P) + 0,0037$$



Une partie de cette courbe (pour $E(R_P) < 0,60\%$) ne sera pas choisie par les investisseurs.