université Paris Ouest Nanterre La Défense

Principes de choix de portefeuille

**
*

Christophe Boucher

cboucher@u-paris10.fr

Année universitaire 2016/2017

Brochure d'exercices

Sommaire

NB 1 : Pour de nombreux exercices de calculs algébriques, il est recommandé d'utiliser un tableur.

NB 2 : Pour les calculs des fonctions de répartition, vous pouvez utiliser dans Excel les fonctions *Loi.Normale.Standard* et *Loi.Student* ainsi que *Loi.Normale.Inverse* et *Loi.Student.Inverse*. Consultez l'aide de ces fonctions avant de les utiliser.

FICHE 1

Connaissances préliminaires et notions de probabilités et statistiques

Exercice 1. Rappels de statistiques et de probabilités (1)

On considère deux valeurs bancaires, ITCD et HT. On désigne par $\tilde{r}_A$ la rentabilité de ITCD et par $\tilde{r}_B$ celle de HT.
Alors que $\tilde{r}_A$ peut prendre trois états : *bull market* ($\tilde{r}_A$=30%), *bear market* ($\tilde{r}_A$=10%), *crise* ($\tilde{r}_A$ =−10%), la rentabilité $\tilde{r}_B$ ne peut prendre que deux états: *bull market* ($\tilde{r}_B$ = +25%) et *crise* ($\tilde{r}_B$ = −15%).

Les probabilités jointes sont résumées par le tableau suivant:

		$\tilde{r}_A$		
		crise	*Bear*	*Bull*
$\tilde{r}_B$	*bull*	0,1	0,1	0,4
	crise	0,15	0,15	0,1

1. A partir de l'observation du tableau, vous attendez-vous à une corrélation positive ou négative entre les rentabilités des deux valeurs ?

2. Calculez les lois marginales.

3. Calculez les espérances de rentabilité des deux valeurs.

4. Calculez les variances et écarts types des deux valeurs.

5. Calculez la covariance.

6. Calculez la corrélation.

7. Établissez la probabilité conditionnelle de $\tilde{r}_A$ sachant que HT est dans un *bull market*.

8. Calculez l'espérance conditionnelle de $\tilde{r}_A$ sachant que HT est dans un *bull market*.

9. Calculez la variance et la volatilité conditionnelle de $\tilde{r}_A$ sachant que HT est dans un *bull market*.

Exercice 2 : Rappels de statistiques et de probabilités (2)

Le département quantitatif vous transmet les informations suivantes concernant deux actions liées au même secteur de l'exploitation forestière.

Les rentabilités et les probabilités de ces deux sociétés sont les suivantes:

$\tilde{r}_A$	-10%	10%	25%
p_A	25%	25%	50%
$\tilde{r}_B$	-16,22%		19,68%
p_B	20%		80%

1. Calculez les espérances et variances des deux sociétés.

2. Votre fonction d'utilité est du type moyenne-variance : $U(\tilde{r}) = E(\tilde{r}) - \frac{1}{2} A \cdot V(\tilde{r})$
A quoi correspond intuitivement le coefficient A ?
Laquelle de ces deux actions préférez vous ?

3. Calculez la skewness, *Sk*, et la kurtosis, *Ku*, (cœfficient d'asymétrie et cœfficient d'aplatissement) des deux actions.
Que concluez vous quand au risque de ces deux actions ?

4. Quelles sont à votre avis les préférences pour la skewness et la kurtosis ?

5. Proposez une amélioration de la fonction d'utilité tenant compte de ces moments d'ordre supérieur.

Rappel :

$$Sk(\tilde{r}) = E\left[\left(\frac{\tilde{r} - \mu}{\sigma}\right)^3\right] \quad \text{et} \quad Ku(\tilde{r}) = E\left[\left(\frac{\tilde{r} - \mu}{\sigma}\right)^4\right]$$

Exercice 3. Rappels de statistiques et de probabilités (3)

Les Hedge Funds Global Micro ont leur durée de vie, X (exprimée en mois), qui est une variable aléatoire Normale $\mathrm{N}(45;4)$.

1. Calculez $P(X < 39)$, $P(X \geq 48)$ et $P(35 < X < 48)$.

2. Calculez $P(|X - m| \leq \sigma)$.

Exercice 4. Calculs d'indices

Nous cherchons à construire un indice « énergie solaire » à partir de trois actions françaises de ce secteur. Considérons les informations relatives (prix et nombre d'actions à trois dates) à ces trois actions A, B et C :

	P_0	Q_0	P_1	Q_1	P_2	Q_2
Action A	20	200	22	200	22	200
Action B	12	400	15	400	15	400
Action C	90	100	82	100	41	200

1. Calculez deux indices « énergie solaire » : (1) un indice pondéré par les prix et (2) un indice pondéré par la capitalisation.

2. Calculez les rentabilités de chaque indice pour chacune des 2 périodes et comparez-les. Commentez.

3. Citez des indices construits selon chacune de ces méthodes.

Exercice 5. Achats sur marge

1. Vous gérez un fonds « développement durable » et vous souhaitez acheter 100 actions B à 15€ par action. Le dépôt en garantie est de 60%, quelle somme de votre poche *cash* devez-vous mobiliser pour cet achat ?

2. Le cours de l'actions B chute à 11€. Quel est maintenant votre pourcentage de marge ? Si la marge de maintenance est de 40%, que se passe-t-il ? Construisez le compte associé à ces transactions.

3. A quel prix devrez-vous répondre à un appel de marge ?

Exercice 6. Ventes à découvert

1. Vous gérer un fonds Long-Short et vous souhaitez vendre à découvert 100 actions de la société *Keep Quiet* à 73€ par titre. Le dépôt en garantie initial est de 55%, combien de collatéral devez-vous investir ?

2. Supposons que le cours de la société chute à 65€. Quel est votre pourcentage de marge ? Si la marge de maintenance est de 30%, que se passe-t-il ?

3. Supposons que le cours rebondisse ensuite à 80€. Quel est votre pourcentage de marge ?

4. A quel prix devrez-vous répondre à un appel de marge ?

FICHE 2

Espérance d'utilité, critère moyenne-variance et dominance stochastique

Exercice 6. Espérance d'utilité et équivalent certain

1. Un agent rationnel au sens de von Neumann – Morgenstern est indifférent entre les loteries A et B ci-dessous. Préfère-t-il A à C ou le contraire ?

Loterie A ≡ (0, ½ ; 20, 1/3 ; 50, 1/6)

Loterie B ≡ (0, 2/3 ; 50, 1/3)

Loterie C ≡ (0, ¼ ; 20, ¾)

On considèrera que u(0) = 0 et on posera de façon arbitraire – afin de résoudre ce problème – que u(50) = 20.

2. Un individu dont les préférences satisfont les axiomes de von Neumann – Morgenstern préfère strictement la loterie A ≡ (1000, 10% ; 100, 70% ; 0, 20%) à la loterie B ≡ (500, 10% ; 100, 90%). Par ailleurs, il lui est indifférent de recevoir 200 euros avec certitude ou de jouer à la loterie (1000, 62,5% ; 0, 37,5%). Laquelle des loteries C et D ci-dessous préférera-t-il ?

Loterie C ≡ (500, 90% ; 0 ; 10%)
Loterie D ≡ (500, 80% ; 100, 20%)

Exercice 7. Utilité quadratique et approche moyenne/variance

1. Soit la fonction d'utilité suivante, où l'utilité dépend de la richesse :

$$U(W) = W - \frac{b}{2}W^2.$$

Supposons que la richesse est liée à la richesse initiale et au rendement d'un actif risqué de la façon suivante :

$$W = W_0(1+R).$$

1. Montrez qu'on peut réécrire la fonction d'utilité pour l'exprimer en fonction du rendement de la façon suivante :

$$U(R) = k_0 + k_1 R - \frac{k_2}{2}R^2$$

2. Posez $E(R) = \boldsymbol{\mu}$ et $E[(R - E(R))^2] = \boldsymbol{\sigma}^2$

Trouvez une expression de l'espérance d'utilité ($E\left[U(W)\right]$) à partir de $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\sigma}^2$ seulement.

3. Trouvez la pente d'une courbe d'indifférence dans le plan rendement espéré/écart type. Expliquez le signe de cette pente.

Exercice 8. Dominance stochastique et critère de choix moyenne/variance

On considère les probabilités suivantes pour les rentabilités de deux fonds monétaires dynamiques A et B.

Fonds A		Fonds B	
Rentabilité	Probabilité	Rentabilité	Probabilité
0,00%	0,1	-0,50%	0,1
0,50%	0,2	-0,25%	0,2
1,00%	0,4	1,50%	0,4
2,00%	0,2	3,00%	0,2
3,00%	0,1	4,00%	0,1

1. Calculez la moyenne et la variance des rentabilités de ces deux fonds.

2. Expliquez pourquoi certains investisseurs choisiront le fonds A et d'autres le fonds B.

3. Comparez les deux fonds à partir du critère de dominance stochastique d'ordre 2.

Exercice 9. Dominance stochastique et critère de choix moyenne/variance (2)

Soient $\tilde{X}_A$ et $\tilde{X}_B$ les rendements de deux actions normalement distribués. A partir du graphique de la loi de densité de la loi normale, comparez les portefeuilles constitués uniquement d'actions A ou d'actions B, en utilisant les critères de dominance stochastique de premier ordre et de second ordre dans les trois cas suivants :

Cas 1	Cas 2	Cas 3
$E(\tilde{X}_A) = E(\tilde{X}_B)$	$E(\tilde{X}_A) > E(\tilde{X}_B)$	$E(\tilde{X}_A) < E(\tilde{X}_B)$
$\boldsymbol{\sigma}(\tilde{X}_A) > \boldsymbol{\sigma}(\tilde{X}_B)$	$\boldsymbol{\sigma}(\tilde{X}_A) = \boldsymbol{\sigma}(\tilde{X}_B)$	$\boldsymbol{\sigma}(\tilde{X}_A) < \boldsymbol{\sigma}(\tilde{X}_B)$

Exercice 10. Dominance stochastique et critère de choix moyenne/variance (3)

Considérons les rendements de deux portefeuilles « équilibré » et « dynamique » et leurs probabilités selon les états de la nature de l'économie.

États de la nature	Équilibré	Dynamique	Probabilité
Récession profonde	3%	3%	0,2
Récession	4%	5%	0,2
Redémarrage	5%	7%	0,2
Croissance	6%	9%	0,2
Euphorie	7%	11%	0,2

1. Calculez la moyenne, la variance, l'écart type, le skewness et la kurtosis des rentabilités de ces deux actifs. Commentez.

2. Considérons une fonction d'utilité du type moyenne-variance : $U(\tilde{r}) = E(\tilde{r}) - \frac{1}{2} A \cdot V(\tilde{r})$

Le département commercial de votre société de gestion vous communique les cœfficients d'aversion pour le risque (A) de 3 de vos clients privés :

M. Pink	M. Blonde	M. Red
A = 66,67	A = 10	A = 90

Quel portefeuille conseillez-vous à chacun de vos clients ? Commentez.

3. Représentez les différentes courbes d'indifférence pour chaque client dans un plan rendement espéré/écart type où vous ferez figurer les coordonnées des deux portefeuilles.

4. Classez ces deux portefeuilles selon les critères de dominance stochastique à l'ordre 1 puis à l'ordre 2. Que constatez-vous ? Expliquez ?

5. Considérez à présent les deux portefeuilles suivants :

Etats de la nature	Equilibré+	Dynamique+	Probabilité
Récession profonde	3%	3%	0,03
Récession	4%	5%	0,22
Redémarrage	5%	7%	0,5
Croissance	6%	9%	0,22
Euphorie	7%	11%	0,03

Reprenez les questions 1 à 4 et commentez.

FICHE 3

Fonction d'utilité, attitude vis-à-vis du risque et prime de risque

Exercice 11. Primes de risque

Considérons un étudiant dont le comportement face au risque peut être représenté par une fonction d'utilité logarithmique. Sa richesse, une chambre de bonne dans le quartier latin, s'élève à 200000€.
Sa banque suisse lui conseille de vendre son bien immobilier et lui propose deux types de placements pour la somme placée :

(1) Fonds à formule :
- 50% de gagner 14000€
- 50% de perdre 14000€

(2) Fonds de *hedge funds* :
- 80% de gagner 25000€
- 20% de perdre 50000€

1. Calculez et comparez les primes de risque de Markowitz et de Arrow-Pratt de cet étudiant pour le fonds à formule .

2. Effectuez de même avec le fonds de *hedge funds*. Commentez.

Rappel :

La prime de risque de Arrow-Pratt se calcule de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\pi} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^2_{\tilde{W}}\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

La prime de risque de Markowitz est définie telle que :

$$E\left[U(\tilde{W})\right] = U\left[E(\tilde{W}) - \boldsymbol{\rho}\right]$$

ou encore

$$\boldsymbol{\rho} = \text{richesse espérée} - \text{équivalent certain de la richesse}$$

Exercice 12. Attitude vis-à-vis du risque

Soit les fonctions d'utilité exponentielle et logarithmiques suivantes :

$U(W) = -e^{-\gamma W}$ avec $\gamma \geq 0$

et

$U(W) = 2 \ln W$

1. Définissez de manière générale (formule et explications) les coefficients a) d'aversion absolu pour le risque, b) d'aversion relative pour le risque, c) de prudence, d) de tempérance et e) d'anxiété.

2. Calculez ces différents cœfficients d'attitude face au risque pour les deux fonctions d'utilité présentées

3. Considérons trois actions françaises dont l'historique des rentabilités annualisées est le suivant:

	Action A	Action B	Action C
Moyenne	12%	18%	18%
Ecart type	16%	24%	24%
Coefficient d'asymétrie	0,002	0,018	0,345
Coefficient d'aplatissement	2,975	3,024	3,025
P-value de la statistique de Jarque-Berra	0,672	0,231	0,008

3.1) L'analyse moyenne-variance est-elle adaptée pour construire un portefeuille à partir de ces trois fonds. Expliquez ?

3.2) Un investisseur caractérisé par la fonction d'utilité exponentielle présentée précédemment préfère-t-il le fonds B ou le fonds C s'il doit investir l'intégralité de son portefeuille dans un seul de ces deux fonds ? Expliquez

Exercice 13. Fonction d'utilité et aversion pour le risque

Considérons une fonction d'utilité moyenne-variance de type : $U(\tilde{r}) = E(\tilde{r}) - \frac{1}{2} A \cdot V(\tilde{r})$

1. Dans le plan moyenne/écart type, représentez les courbes d'indifférence pour les niveaux d'utilité $\bar{U} = 1$ et $\bar{U} = 3$ en supposant $A = 2$.

2. Dans un nouveau plan moyenne/écart type, représentez les courbes d'indifférence pour le niveaux d'utilité $\bar{U} = 1$ en faisant varier A de 2 à 4.

3. Donnez une interprétation économique des deux graphiques obtenus aux deux questions précédentes.

4. Considérons à présent que la fonction d'utilité d'un de vos clients privés peut être raisonnablement approximée par une fonction d'utilité moyenne/variance avec $A = 2$.

Votre société de gestion est susceptible de lui proposer 3 profils de fonds dont les caractéristiques sont les suivantes :

	Fonds monétaire	Fonds alternatif	Fonds actions internationales
Rentabilités		Probabilités	
-50%		0,3	
-27,5%			0,2
2,5%	1		
10%			0,8
25%		0,7	

Quel fonds lui proposez-vous ? Si le client ne souhaite pas investir dans un fonds monétaire quel fonds lui conseillez-vous ?

FICHE 4

Extension du critère moyenne-variance et mesures de risques

Exercice 14. Approche moyenne-variance-skewness-kurtosis

Le tableau suivant présente les moments des rentabilités de différents indices (indice de fonds alternatifs, MSCI Emerging et World).

	Moyenne	Volatilité	Skewness	Kurtosis
MSCI Emerging	0,0058	0,0452	-2,14	14,91
Long/Short	0,0088	0,0056	0,29	4,76
MSCI World	0,0093	0,0462	-0,21	3,39

1. Dans quel type de fonds auriez-vous investi si vous êtes caractérisés par une fonction d'utilité moyenne-variance avec une aversion pour le risque de 3.

2. Dans quel type de fonds investissez-vous maintenant (et pourquoi) si votre fonction d'utilité est de type moyenne-variance-skewness-kurtosis :

$$U(\tilde{x}) = E(\tilde{x}) - \frac{1}{2}A_1 V(\tilde{x}) + A_2 Sk(\tilde{x}) - A_3 Ku(\tilde{x})$$

avec un paramètre d'aversion pour le risque de 3, un paramètre de préférence pour la skewness de 10 et un paramètre d'aversion pour la kurtosis de 1.

Exercice 15. Aversion pour le risque et mesures de risques basées sur les quantiles

Les analystes quantitatifs vous indiquent qu'en moyenne, les positions actuelles du portefeuille d'actions que vous gérez ont offert historiquement une rentabilité de 10% et que la probabilité de perte (rentabilité négative) est de 15% (données annuelles).

La rentabilité de l'actif sans risque (EONIA) notée r_f est aujourd'hui de 3%.

La rentabilité de votre portefeuille risqué est décrite par une variable aléatoire notée, $\tilde{r}_p$. On suppose que la distribution de $\tilde{r}_p$ est normale de moyenne $\boldsymbol{\mu}_p$ et de variance $\boldsymbol{\sigma}_p^2$ c'est-à-dire : $N(\boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\sigma}_p^2)$.

En vous aidant de la table de la loi normale, répondez aux questions suivantes.

1. Déterminez la volatilité attendue de votre portefeuille, σ_p.

2. Un client privé souhaite placer 60% de sa richesse dans votre portefeuille (risqué) et 40% dans l'actif sans risque. Déterminez son cœfficient d'aversion pour le risque, A, sachant que sa fonction d'utilité est de type moyenne-variance.

3. Quelle loi de probabilité suit sa richesse constituée de l'actif sans risque et du portefeuille risqué en indiquant précisément l'expression de l'espérance et de la variance.

4. Indiquez au client la rentabilité de son portefeuille en-dessous de laquelle il risque de tomber dans 5% des réalisations ainsi que celle qu'il risque de dépasser dans 1% des cas.

Exercice 16. Stratégie long-short et maximisation de l'utilité

Vous gérez un fonds alternatif long-short qui consiste à acheter des actifs sous-évalués et vendre à découvert d'autres actifs sur-évalués. Votre richesse initiale est notée W_0. Vous souhaitez aujourd'hui investir dans deux actifs dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau suivant :

actif	Prix	rentabilité	Rentabilité attendue	Volatilité
1	$P_{1,0} = 10$	$\tilde{r}_1$	$\mu_1 = 5\%$	$\sigma_1 = 15\%$
2	$P_{2,0} = 100$	$\tilde{r}_2$	$\mu_2 = 15\%$	$\sigma_2 = 20\%$

La rentabilité de l'actif sans risque est par ailleurs de 3%. La corrélation entre les deux actifs est notée ρ.

Vous pensez que l'actif 1 est sur-évalué (vous attendez donc une rentabilité faible) et l'actif 2 sous-évalué (vous attendez donc une rentabilité relativement forte). Votre richesse initiale vous permet d'amortir les éventuels « ratés » de votre stratégie et est donc investie entièrement dans l'actif sans risque.

1. Quel actif allez-vous vendre et lequel allez-vous acheter ?

2. Déterminez le nombre d'actifs 1 et 2 achetés et vendus lors de l'opération notés respectivement n_1 et n_2. Notez que les montants reçus lors de la vente à découvert servent intégralement à acheter l'autre actif risqué détenu en position longue.

3. Quelle est la rentabilité attendue de votre portefeuille $\tilde{r}_p$? Pour simplifier les notations, vous pouvez noter $\delta = n_2 P_{2,0} / W_0$

4. Déterminez les caractéristiques de votre portefeuille (espérance de rendement et volatilité)

5. Déterminez la formule de la stratégie optimale concernant les positions longues et courtes permettant de maximiser votre utilité moyenne-variance

6. Calculez la valeur numérique de votre investissement $\boldsymbol{\delta}$ en supposant que $\boldsymbol{\rho} = 0{,}1$ et que votre paramètre d'aversion pour le risque A = 3.

7. Expliquez pourquoi ce type de stratégie doit être montée avec un coefficient de corrélation proche de zéro.

8. En supposant que $\boldsymbol{\rho} = 0$, quel est l'impact sur $\boldsymbol{\delta}$ d'une augmentation de A, puis d'une augmentation de, $\boldsymbol{\mu}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_1$ et de $\boldsymbol{\sigma}_2$. Expliquez dans chacun de ces cas le raisonnement économique sous-jacent.

A présent on se place dans le cadre général où l'on n'a plus besoin d'investir dans l'actif sous-évalué le montant reçu lors de la vente à découvert de l'actif sur évalué. On suppose toujours que l'actif 1 est sur-évalué et que l'actif 2 est sous-évalué. L'apport personnel est de W_0. On place ce montant au taux sans risque. Le montant reçu lors de la vente à découvert est également placée au taux sans risque.
En revanche, l'actif sous évalué est financé par un crédit. On suppose que le taux d'emprunt est égal au taux de placement. Pour le moment on suppose que les deux actifs sont corrélés avec une corrélation de $\boldsymbol{\rho}$.

9. Établissez la rentabilité du portefeuille en notant par $\boldsymbol{\delta}_1 = -n_1 P_{1,0} / W_0$ et par $\boldsymbol{\delta}_2 = -n_2 P_{2,0} / W_0$

10. Trouvez la stratégie long/short généralisée, $\boldsymbol{\delta}_1$, $\boldsymbol{\delta}_2$, maximisant votre fonction d'utilité moyenne-variance.

11. En supposant que $\boldsymbol{\rho} = 0$, discutez la signification économique des équations trouvées.

Exercice 17. Mesures de risques basées sur les quantiles

On suppose que l'indice européen a une espérance de rentabilité annualisée de 10% et un écart type annualisé de 12%. Le taux sans risque est de 3%. On suppose que ces grandeurs restent constantes pour toujours et qu'elles sont mesurées sans erreur. On vous confie la gestion de la caisse de retraite des enseignants de l'université, doté de 200 milliards d'euros. Tous les ans on vous demande de générer 14 milliards pour verser une retraite à vos anciens enseignants. On vous demande de ne pas diminuer la dotation de 200 milliards dans le long terme. Cette somme de 14 milliards doit être versée en une fois.

1. Comment devriez vous répartir la richesse entre l'actif sans risque et le portefeuille de marché afin d'assurer en moyenne les versements demandés.

2. Sous l'hypothèse que le portefeuille de marché suit une distribution normale, quelle est la probabilité que la rentabilité de votre portefeuille prenne une valeur négative (dans ce cas vous devriez puiser les paiements pour la retraite de vos enseignants dans la dotation)? Tous les combien d'années aurez vous une rentabilité négative?

3. En fait, le portefeuille de marché suit une loi du t de Student avec 3 degrés de liberté. Que devient la probabilité d'avoir une rentabilité négative? Tous les combien d'années cela se produira-t-il en moyenne ?

4. On vous demande de choisir une exposition pour votre portefeuille en sorte qu'au maximum une année sur trente, vous réalisez une perte. Comment allez vous faire en supposant normalité de vos rentabilités ? Et si les rentabilités étaient générées par une loi *t* de Student avec 3 degrés de liberté.

5. Avec le choix d'allocation obtenu dans la question précédente, que devient en moyenne le montant que vous pouvez verser à vos maîtres ?

FICHE 5

Portefeuille de deux actifs risqués et droite de marché du capital

Exercice 18. Portefeuille de deux titres : expressions analytiques

Soit le portefeuille p composé de deux titres, a et b. Utilisons les définitions habituelles suivantes : r_i, le taux de rendement du titre ou du portefeuille *i* ; μ_i, l'espérance du rendement du titre ou du portefeuille *i* ; σ_i^2, la variance du rendement du titre ou du portefeuille *i* ; σ_{ij}, la covariance entre les rendements sur des titres *i* et *j* ; x_i, la fraction de la richesse totale d'un portefeuille investie dans le titre *i*.

1. Écrivez une expression algébrique pour le rendement du portefeuille *p*, en fonction des rendements des titres individuels

2. Écrivez une expression algébrique pour le rendement espéré du rendement du portefeuille en fonction de μ_a et μ_b.
3. Écrivez une expression algébrique pour la variance du rendement du portefeuille en fonction de σ_a^2, σ_b^2 et σ_{ab}.

4. Montrez que dans le cas d'une corrélation parfaite (égale à un) entre les rendements r_a et r_b, l'écart type du portefeuille est égal à : $\sigma_p = x_a\sigma_a + (1 - x_a)\sigma_b$

5. Montrez comment il est possible de construire un portefeuille sans risque de deux actifs ayant des rendements qui sont parfaitement corrélés.

6. Est-ce que ce portefeuille implique nécessairement la vente à découvert ?

7. Est-ce que le rendement espéré de ce portefeuille peut se situer entre μ_a et μ_b.

Exercice 19. Portefeuille de deux titres : résolution algébrique

Soit deux actifs caractérisés par :

	Rendement en %	Écart type en %
Actif 1	9	4
Actif 2	16	6

Soit *x* la part de l'actif 1 dans votre portefeuille et $\rho_{1,2}$ le cœfficient de corrélation entre l'actif 1 et l'actif 2.

1. Calculez le rendement et le risque des différents portefeuilles possible constitués de ces deux actifs (utilisez *x* égal à 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1) dans les quatre cas suivants :

a) $\rho_{1,2} = 1$

b) $\rho_{1,2} = -1$

c) $\rho_{1,2} = 0$

d) $\rho_{1,2} = 0,5$.

2. Représentez graphiquement ces opportunités de portefeuille dans un plan espérance - écart type. Tous les portefeuilles représentés sont-ils efficaces (pour chaque niveau du cœfficient de corrélation considéré)

3. Recherchez la composition du portefeuille de variance minimale lorsque $\rho_{1,2} = 0,5$ et donnez la valeur alors de la variance du portefeuille.

4. Le rendement de l'actif sans risque est égal à 3%. On considère toujours que $\rho_{12} = 0,5$.
En investissant à la fois dans l'actif sans risque et dans les actifs risqués expliquez ce que représente la demi-droite représentant les portefeuilles réalisables.

5. Comment composez-vous votre portefeuille pour obtenir une espérance de rendement de 5%

Exercice 20. Portefeuille de deux actifs risqués, droite de marché et mesures de risque sur quantiles

Le taux sans risque auquel on peut prêter ou emprunter est de 3,5%.Utilisant des longues séries de données, de deux fonds d'investissement dont la rentabilité aléatoire est notée $E(\tilde{r}_1)$ et $E(\tilde{r}_2)$, vous avez obtenu les caractéristiques suivantes :

$$E(\tilde{r}_1) = 20\% \qquad \sigma^2(\tilde{r}_1) = 0,0625$$

$$E(\tilde{r}_2) = 5\% \qquad \sigma^2(\tilde{r}_2) = 0,04$$

$$\rho_{12} = -0,4$$

Pour une richesse initiale de W_0, on note α la proportion investie dans un portefeuille risqué et par $1 - \alpha$ la proportion investie dans l'actif sans risque. Si W_1 désigne le montant investi dans les actifs risqués alors δ désigne la part investie dans l'actif 1 et $1 - \delta$ celle investie dans l'actif 2.

1. Pour les valeurs δ = 0, 0,25, 0,5, 0,75, et 1, calculez les caractéristiques (espérance de rentabilité/risque) du portefeuille composé des actifs 1 et 2.

2. Tracez la frontière de minimum variance dans le plan espérance de rentabilité/risque

3. Déterminez analytiquement et numériquement le δ, noté δ_{Min}, pour lequel le portefeuille des actifs 1 et 2 a une variance minimale globale.

4. Quelle est l'espérance de rentabilité, la variance, et l'écart type de ce portefeuille de variance minimale globale.

5. Représentez ce portefeuille dans le plan précédent. Représentez toujours dans ce plan la droite de marché du capital. Déterminez graphiquement une valeur approximative de δo l'allocation optimale dans l'actif risqué 1.

6. Pour cette valeur, déduisez la valeur du ratio de Sharpe

7. On suppose qu'un investisseur a un cœfficient d'aversion au risque de A = 10 pour une fonction d'utilité de type moyenne-variance. Déterminez la valeur de $\boldsymbol{\alpha}^*$ ainsi que les caractéristiques du portefeuille correspondant, $\boldsymbol{\mu}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_x$. Déterminez également le niveau de la fonction d'utilité.

8. Cet investisseur a une richesse de 1000€. Indiquez comment cette richesse se répartit entre l'actif sans risque, le portefeuille risqué optimal, puis entre les deux portefeuilles 1 et 2.

9. On suppose de plus que toutes les rentabilités (des actifs risqués) sont distribuées selon la loi normale. Déterminez le seuil de richesse en dessous duquel, sur un horizon d'un an, vous risquez de tomber avec une probabilité de 5%.

10. En fait, les rentabilités sont distribuées selon la loi du *t* de Student avec trois degrés de liberté. Que devient votre réponse à la question 9 ? En rappellent les propriétés de la loi du *t* de Student par rapport à une loi normale, indiquez intuitivement pourquoi ce résultat est raisonnable.

FICHE 6

Portefeuille de N actifs risqués, frontière efficiente et diversification

Exercice 21. Portefeuille de N actifs risqués et un actif sans risque

Soit trois actifs caractérisés par :

Titre	Rendement espéré en %	Ecart type en %
1	14	6
2	8	4
3	19	12

et les cœfficients de corrélations suivants :

titre	1	2	3
1	1	0,3	0,2
2	0,3	1	0,4
3	0,2	0,4	1

Le taux sans risque est égal à 4% et les ventes à découvert sont autorisées.

1. Déterminez la composition du portefeuille de marché
2. Calculez l'équation de la frontière efficiente. Que représente cette droite ?
3. Pour obtenir un rendement espéré de votre portefeuille de 8%, comment le composez-vous ?

Exercice 22. Portefeuille de N actifs risqués

Soit trois actifs caractérisés par :

Titre	Rendement espéré en %
1	11
2	9
3	42

La matrice de variance-covariance est la suivante :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0,0064 & 0,00336 & 0,011088 \\ 0,00336 & 0,0049 & 0,008316 \\ 0,011088 & 0,008316 & 0,1089 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas d'actif sans risque.

1. Posez le programme d'optimisation (sans le résoudre)

2. Donnez la composition des portefeuilles efficients d'espérance de rendement 0 et 1.

3. Donnez la structure du portefeuille efficient d'espérance de rendement 19,55%.

4. Donnez l'équation de la frontière efficiente et interprétez là.

5. Un actif sans risque de rendement 4% est introduit, donnez l'équation de la nouvelle frontière efficiente en utilisant l'équation de la frontière efficiente sans actif sans risque. Quel est l'effet de l'introduction d'un actif sans risque sur les portefeuilles possibles.

Exercice 23. La diversification

On vous indique que l'écart type moyen annualisé d'une action norvégienne, prise au hasard est de $\bar{\sigma}$ = 0,3. On vous indique de même que la corrélation moyenne entre actions est de $\bar{\rho}$ = 0,3526.

1. Calculez les réductions de risque pour des portefeuilles, équipondérés, composés de N =1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40 actifs. Que constatez vous ?

2. Vers quelle valeur devrait tendre le risque d'un portefeuille équipondéré?

3. Que concluez vous par rapport à l'affirmation suivante: "En général on pense qu'un portefeuille bien diversifié est constitué d'environ 30 actifs"?

FICHE 7

MEDAF, risque spécifique et risque de marché

Exercice 24.

Le taux sans risque est de 8%, la rentabilité anticipée du marché est de 18%.

1. Une action se vend aujourd'hui pour 100€. Elle paiera un dividende de 9€ par action à la fin de l'année. Son bêta est de 1. Quel prix par action anticipent les investisseurs pour la fin de l'année ?

2. Vous achetez une entreprise avec un cash flow annuel permanent que vous anticipez être de 1 million d'€ mais vous n'êtes pas sûr de son risque. Si vous pensez que son bêta est de 0,5, quand en réalité il est de 1, combien allez vous offrir de plus par rapport à la vraie valeur ?

3. Une action a une rentabilité anticipée de 9%. Quel est son bêta ?

Exercice 25.

En 1985, aux États Unis, la rentabilité des titres à court terme émis par le gouvernement était d'environ 6%. Supposez que la rentabilité anticipée par le marché pour un portefeuille avec un bêta de 2 est de 30%.

1. D'après le CAPM quel est la rentabilité anticipée pour le portefeuille de marché ?

2. Une action de l'entreprise *Astrotech* s'est vendue à 40$. A ce moment un analyste a prédit un dividende de 3$ pour 1988 et un prix de vente de 41$. Si $\beta = -0{,}4$ l'action fut elle sur ou sous- évaluée si on croit aux prévisions de l'analyste.

Exercice 26.

La rentabilité de l'actif sans risque est de 2,5%. En même temps vous avez accès à une opportunité d'investir dans une société non-cotée dont les rentabilités et probabilités associées sont données dans le tableau suivant

	1	2
rentabilité	+25%	-50%
probabilité	70%	30%

1. Calculez l'espérance de rentabilité et la variance de cet investissement.

2. Vous avez une fonction d'utilité moyenne-variance. Si vous ne savez rien d'autre sur cet investissement, quelle fraction de votre richesse y-placerez vous ?

On donne maintenant les caractéristiques du marché

$$E(R_M) = 6,5\% \qquad V(R_M) = 0,0289 \qquad \sigma_{iM} = -0,00289$$

3. Montrez qu'avec ces informations supplémentaires, vous achetez de cet actif. Pourquoi changez vous d'avis?

4. Déterminez le seuil de σ_{iM} à partir du quel vous cessez d'investir dans cette société non-cotée.

Exercice 27.

Le prix d'un actif, à la data 0, est P_0. Son prix de revente, à la date 1, est du point de vue de la date 0 une variable aléatoire notée $\tilde{P}_1$. On suppose que le Médaf est valide et que le bêta de l'actif est noté β.

1. Montrez que $P_0 = E(\tilde{P}_1) / \left[1 + r_f + (\mu_M - r_f)\beta\right]$

2. Montrez que l'on peut récrire cette formule sous la forme $P_0 = E[\tilde{P}_1 - a\,.\rho\,.\sigma]/[1 + r_f]$, où ρ est la corrélation entre le prix de l'actif et la rentabilité du marché. Le paramètre σ est sa volatilité et le paramètre *a* est à déterminer...

3. Interprétez les résultats obtenu à la question 2.

On suppose maintenant que l'actif vous verse pour toutes les dates futures, *t* = 1, 2,.. un montant aléatoire noté $\tilde{X}$.

4. Adaptez la formule de la question 1 pour tenir compte de cette nouvelle donne.

5. Exprimez maintenant le prix initial de cet investissement en fonction de tous les cash-flows futurs.

Exercice 28.

Le modèle de marché postule que la rentabilité de tout actif *i* peut s'écrire, en introduisant une source d'incertitude ε_i, non corrélée entre actifs, comme :

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{r}_M + \varepsilon_i$$

1. Décomposez la variance de l'actif *i* en celle systématique et celle spécifique.
2. Quelle est la covariance entre l'actif *i* et celle du marché ? Montrez qu'on obtient $\beta_i = \dfrac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$.

3. Considérez deux actifs *i* et *j*. Montrez que si les paramètres $\boldsymbol{\alpha}_i$ et $\boldsymbol{\beta}_i$ ainsi que les caractéristiques du marché sont connues, alors on peut aisément déduire $\text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$.

4. Considérez maintenant un portefeuille équipondéré et montrez que si le nombre d'actifs dans votre portefeuille est grand alors le risque idiosyncrasique, disparaît et seul le risque de marché persiste.

Extraits du CFA

1. Dans le cadre du CAPM supposez que
• La rentabilité du marché est de 15%
• Le taux sans risque est de 8%
• La rentabilité attendu de la compagnie LémanGen est de 17%
• Le bêta de LémanGen est de 1,25

Laquelle des réponses suivantes est correcte

a) Le prix de LémanGen est trop élevé
b) Le prix de LémanGen est juste
c) La rentabilité attendue de LémanGen a un alpha de 0.25%
d) La rentabilité attendue de LémanGen a un alpha de -0.25%

2. Le CAPM affirme que la meilleure façon d'expliquer les rentabilités d'un portefeuille est par :
a) Les facteurs économiques
b) le risque spécifique
c) le risque systématique
d) la diversification

3. Selon le CAPM, la rentabilité attendue d'un portefeuille avec un β de 1 et un α de 0 est
a) entre $\boldsymbol{\mu}_M$ et r_f
b) le taux sans risque r_f
c) $(\boldsymbol{\mu}_M - r_f)\boldsymbol{\beta}$
d) $\boldsymbol{\mu}_M$

Le tableau suivant montre les mesures de risque et de rentabilités pour deux portefeuilles :

Portefeuille	Rentabilité moyenne annuelle attendue	Ecart type	Beta
R	11%	10%	0,5
S&P 500	14%	12%	1,0

On précise que le taux sans risque est généralement positif.

4. Si vous tracez le portefeuille *R* par rapport à la *Security Market Line* (droite de marché), le

portefeuille *R* se situe :
a) sur la SML
b) sous la SML
c) dessus la SML
d) on ne peut pas dire car il manque une donnée

8. Si vous tracez le portefeuille *R* par rapport à la LAC optimale, le portefeuille R se situe :
a) sur la LAC optimale
b) sous la LAC optimale
c) dessus la LAC optimale
d) on ne peut pas dire car il manque une donnée

FICHE 8

MEDAF et modèle à facteurs

Exercice 29.

On étudie la rentabilité de l'action XYZ sur une période de un an et sous les hypothèses du MEDAF.Aujourd'ui en t = 0, l'action s'échange au prix P_0. Dans un an à t = 1; trois états du monde sont possibles. Les probabilités des trois états, la rentabilité r_M en pourcentage du portefeuille de marché, le prix P_1, hors dividende, de l'action XYZ et le dividende versé en fin d'année D_1 sont décrits par le tableau suivant :

Etat du Monde	récession	croissance	surchauffe
Probabilité	1/3	1/3	1/3
Prix P_1	18	21	29
Dividende D_1	3	6	4
Rentabilité r_M	8	11,5	14,25

La rentabilité de l'actif sans risque sans risque est de 10%.

1. Quelle est la rentabilité espérée du portefeuille de marché ? Quelle est l'écart type de la rentabilité du portefeuille de marché ?

2. Exprimez la rentabilité espérée de l'action XYZ en fonction du prix P_0.

3: Calculez le béta de l'action XYZ en fonction du prix P_0, en utilisant la relation : $\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\sigma}_{iM} \big/ \boldsymbol{\sigma}_M^2$

4. Sous les hypothèses du MEDAF, calculez le prix P_0 auquel s'échange aujourd'hui l'action XYZ.

Exercice 30.

On désigne par r_{it} et r_{Mt} la rentabilité d'un actif i et du marché à la date t. On désigne également par $r_{Baa,t}$ la différence entre la rentabilité d'un portefeuille d'obligations risquées d'entreprises de la catégorie Baa (Moodys) et le taux sans risque.

Le taux sans risque est noté r_f.

Les analystes quantitatifs ont, dans une première étape, effectué l'estimation des cœfficients $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_{i1}$ et $\boldsymbol{\beta}_{i2}$ pour chacun des actifs *i*, où *i* = 1, …, *N* dans une régression par les moindres carrés ordinaires du type

$$r_{it} = \boldsymbol{\alpha}_i + r_{Mt}\boldsymbol{\beta}_{i1} + r_{Baa,t}\boldsymbol{\beta}_{i2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{it} \qquad (1)$$

Dans une deuxième phase, ces analystes ont estimé les paramètres $\boldsymbol{\lambda}_M$ et $\boldsymbol{\lambda}_{Baa}$ de la régression

$$\overline{r}_i = a + \boldsymbol{\lambda}_M \hat{\boldsymbol{\beta}}_{i1} + \boldsymbol{\lambda}_{Baa}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i2} + \boldsymbol{\varepsilon}_i \qquad (2)$$

où $\overline{r}_i$ est la moyenne des rentabilités de *i*. Les analystes quantitatifs ont trouvé que l'estimateur $\boldsymbol{\lambda}_{Baa}$ est, d'un point de vue statistique, significativement différent de 0.

1. Quelle valeur de a vous attendez vous à trouver dans la régression (2) ?

2. Que représente $\boldsymbol{\lambda}_M$? Justifiez clairement votre réponse.

3. Expliquez dans quelle mesure la régression (2) représente un test du MEDAF (CAPM)

4. Une première entreprise, *A*, a un $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i2}$ négatif tandis qu'une seconde entreprise, *B*, a un $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i2}$ positif. Quel est l'impact d'une augmentation de $r_{Baa,t}$ pour les rentabilités des deux entreprises. Dans quel cas est-ce que vous allez demander une prime pour vous compenser?

5. En justifiant soigneusement votre réponse, que concluez vous sur le signe de $\boldsymbol{\lambda}_{Baa}$.

Exercice 31.

Un analyste quantitatif a récolté des données mensuelles pour un ensemble *i* = 1,… , *N* de titres de rentabilités r_{it} où *t* couvre les dates *t* = 1,… , T . Il a également récolté les rentabilités du marché notés r_{Mt} et des données sur un certain nombre de facteurs que nous spécifierons plus loin.

On note les valeurs prises par ces facteurs par f_{kt} où *k* = 2,… , *K*.

1. Effectuant les régressions suivantes où $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_{i1}$ et $\boldsymbol{\beta}_{ik}$ sont des paramètres

$$r_{it} = \boldsymbol{\alpha}_i + r_{Mt}\boldsymbol{\beta}_{i1} + \sum_{k=2}^{K} f_{kt}\boldsymbol{\beta}_{ik} + \boldsymbol{\varepsilon}_{it} \qquad (1)$$

pour un sous-ensemble de dates, I = 1,… , *S* où $S < T$, il trouve que les paramètres $\boldsymbol{\beta}_{ik}$ sont statistiquement significatifs. Peut on rejeter le MEDAF pour autant ?

2. L'analyste note les estimateurs de $\boldsymbol{\beta}_{i1}$ et de $\boldsymbol{\beta}_{ik}$ par $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i1}$ et $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ik}$. Il effectue les régressions

$$\overline{r}_i = a + \boldsymbol{\lambda}_M \hat{\boldsymbol{\beta}}_{i1} + \sum_{k=2}^{K} \boldsymbol{\lambda}_k \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ik} + \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{2}$$

où $\overline{r}_i$ représente la rentabilité moyenne de *i* pour la deuxième partie de l'échantillon, soit pour $t = S + 1, \ldots, T$.

Si l'économètre trouve que certains des estimateurs de $\boldsymbol{\lambda}_k$ sont statistiquement significatifs, peut on rejeter le MEDAF ?

3. On prend f_{2t} la variation du prix du pétrole. Quel est à votre avis le signe de $\boldsymbol{\lambda}_2$?

4. On prend f_{3t} comme la différence entre le taux d'une obligation émise par une entreprise (et qui peut être défaillante) et le taux sans risque obtenu par l'achat d'une obligation d'Etat (qui est supposé ne pas pouvoir faire défaillance). A quels signe de $\boldsymbol{\lambda}_3$ vous attendez-vous ?

5. On considère toujours le f_{3t} de la question précédente. Une entreprise a un $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i3}$ négatif. A quelle prime de risque vous attendez vous pour le risque ?

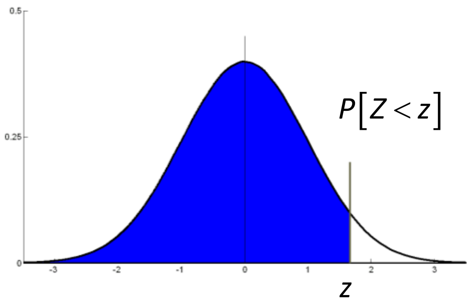
6. Certains financiers ont trié les entreprises selon leur taille. Les petites entreprises formant un indice *low cap* et les grandes entreprises formant un indice *large cap*. Un facteur f_{4t} serait celui composé d'un fond d'investissement composé d'entreprises *low cap* et d'une vente à découverte d'un fonds *large cap*. Souvent on pense que les petites entreprises sont plus difficultés à revendre, c'est à dire qu'elles posent un problème de liquidité.
A quel signe vous attendez vous pour $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i4}$?

7. Certains chercheurs ont récemment considéré une tri des entreprises selon leur skewness. On rappelle qu'une skewness négative correspond à des réalisations négatives extrêmes fréquentes et importantes sans contrepartie en termes de réalisations positives. On dénote par f_{5t} le portefeuille dans lequel on a placé les entreprises avec skewness positive en achat et celles avec skewness négatives en position de vente à découvert. Quels est le signe de $\boldsymbol{\lambda}_5$?

Annexe 1. Table de la loi Normale centrée réduite

La table donne la probabilité d'observer une valeur Z inférieure à la valeur z, c'est-à-dire :

$$P[Z<z]=\int_{-\infty}^{z}(2\pi)^{-1/2}\, exp\left[-\frac{1}{2}Z^{2}\right]dZ$$



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

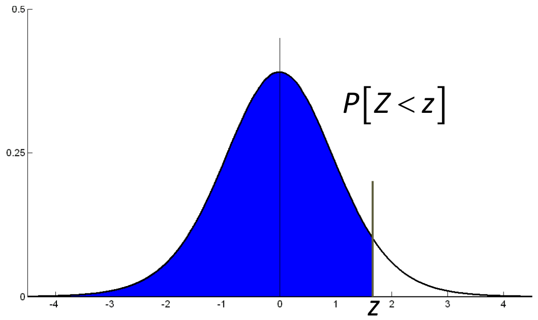
Sources: Calculs de l'auteur à partir du logiciel MATLAB.

Annexe 2. Table de la loi de Student

La table donne la probabilité d'observer une valeur Z inférieure à la valeur z, c'est-à-dire :

$$P[Z<z]=\int_{-\infty}^{z}\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1}(v_i\pi)^{-1/2}\left(1+\frac{Z^2}{v}\right)^{\frac{(1-v)}{2}}dZ$$

où v est ne nombre de degrés de liberté et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma.



v	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.80	0.70	0.60
1	31.821	15.895	10.579	7.916	6.314	5.242	4.474	3.895	3.442	3.078	1.376	0.727	0.325
2	6.965	4.849	3.896	3.320	2.920	2.620	2.383	2.189	2.026	1.886	1.061	0.617	0.289
3	4.541	3.482	2.951	2.605	2.353	2.156	1.995	1.859	1.741	1.638	0.978	0.584	0.277
4	3.747	2.999	2.601	2.333	2.132	1.971	1.838	1.723	1.623	1.533	0.941	0.569	0.271
5	3.365	2.757	2.422	2.191	2.015	1.873	1.753	1.649	1.558	1.476	0.920	0.559	0.267
6	3.143	2.612	2.313	2.104	1.943	1.812	1.700	1.603	1.517	1.440	0.906	0.553	0.265
7	2.998	2.517	2.241	2.046	1.895	1.770	1.664	1.572	1.489	1.415	0.896	0.549	0.263
8	2.896	2.449	2.189	2.004	1.860	1.740	1.638	1.549	1.469	1.397	0.889	0.546	0.262
9	2.821	2.398	2.150	1.973	1.833	1.718	1.619	1.532	1.454	1.383	0.883	0.543	0.261
10	2.764	2.359	2.120	1.948	1.812	1.700	1.603	1.518	1.442	1.372	0.879	0.542	0.260
11	2.718	2.328	2.096	1.928	1.796	1.686	1.591	1.507	1.432	1.363	0.876	0.540	0.260
12	2.681	2.303	2.076	1.912	1.782	1.674	1.580	1.498	1.424	1.356	0.873	0.539	0.259
13	2.650	2.282	2.060	1.899	1.771	1.664	1.572	1.490	1.417	1.350	0.870	0.538	0.259
14	2.624	2.264	2.046	1.887	1.761	1.656	1.565	1.484	1.411	1.345	0.868	0.537	0.258
15	2.602	2.249	2.034	1.878	1.753	1.649	1.558	1.478	1.406	1.341	0.866	0.536	0.258
16	2.583	2.235	2.024	1.869	1.746	1.642	1.553	1.474	1.402	1.337	0.865	0.535	0.258
17	2.567	2.224	2.015	1.862	1.740	1.637	1.548	1.469	1.398	1.333	0.863	0.534	0.257
18	2.552	2.214	2.007	1.855	1.734	1.632	1.544	1.466	1.395	1.330	0.862	0.534	0.257
19	2.539	2.205	2.000	1.850	1.729	1.628	1.540	1.462	1.392	1.328	0.861	0.533	0.257
20	2.528	2.197	1.994	1.844	1.725	1.624	1.537	1.459	1.389	1.325	0.860	0.533	0.257
21	2.518	2.189	1.988	1.840	1.721	1.621	1.534	1.457	1.387	1.323	0.859	0.532	0.257
22	2.508	2.183	1.983	1.835	1.717	1.618	1.531	1.454	1.385	1.321	0.858	0.532	0.256
23	2.500	2.177	1.978	1.832	1.714	1.615	1.529	1.452	1.383	1.319	0.858	0.532	0.256
24	2.492	2.172	1.974	1.828	1.711	1.612	1.526	1.450	1.381	1.318	0.857	0.531	0.256
25	2.485	2.167	1.970	1.825	1.708	1.610	1.524	1.448	1.379	1.316	0.856	0.531	0.256
26	2.479	2.162	1.967	1.822	1.706	1.608	1.522	1.446	1.378	1.315	0.856	0.531	0.256
27	2.473	2.158	1.963	1.819	1.703	1.606	1.521	1.445	1.376	1.314	0.855	0.531	0.256
28	2.467	2.154	1.960	1.817	1.701	1.604	1.519	1.443	1.375	1.313	0.855	0.530	0.256
29	2.462	2.150	1.957	1.814	1.699	1.602	1.517	1.442	1.374	1.311	0.854	0.530	0.256
30	2.457	2.147	1.955	1.812	1.697	1.600	1.516	1.441	1.373	1.310	0.854	0.530	0.256
40	2.423	2.123	1.936	1.796	1.684	1.589	1.506	1.432	1.365	1.303	0.851	0.529	0.255
60	2.390	2.099	1.917	1.781	1.671	1.577	1.496	1.423	1.357	1.296	0.848	0.527	0.254
120	2.358	2.076	1.899	1.766	1.658	1.566	1.486	1.414	1.349	1.289	0.845	0.526	0.254
∞	2.327	2.054	1.881	1.751	1.645	1.555	1.476	1.405	1.341	1.282	0.842	0.524	0.253

Sources: Calculs de l'auteur à partir du logiciel MATLAB.

Annexe 3. Dérivées usuelles

Si u et v sont deux fonctions dérivables, a et b deux constantes, on a les formules suivantes :

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (au)' = au', \qquad (uv)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad (u \circ v)' = v' \times u' \circ v, \qquad (u(ax+b))' = au'(ax+b)$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(u(x))$	$u'(x)f'(u(x))$
C	0	C	0
x	1	$u(x)$	$u'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u^n(x)}$	$-\frac{nu'(x)}{u^{n+1}(x)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
e^x	e^x	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
a^x	$\ln(a) \times a^x$	$a^{u(x)}$	$\ln(a) \times u'(x)a^{u(x)}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$	$\tan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$