Exercices

Exercice 1 :

Soit deux actifs caractérisés par :

	Rendement en %	Écart type en %
Actif 1	9	4
Actif 2	16	6

Soit *x* la part de l'actif 1 dans votre portefeuille et $\rho_{1,2}$ le coefficient de corrélation entre l'actif 1 et l'actif 2.

1. Calculez le rendement et le risque des différents portefeuilles possible constitués de ces deux actifs (utilisez *x* égal à 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1) dans les quatre cas suivants :

a) $\rho_{1,2} = 1$

b) $\rho_{1,2} = -1$

c) $\rho_{1,2} = 0$

d) $\rho_{1,2} = -0,5$.

2. Représentez graphiquement ces opportunités de portefeuille dans un plan espérance - écart type.

3. Recherchez la composition du portefeuille de variance minimal dans les trois cas suivants :

a) $\rho_{1,2} = -1$

b) $\rho_{1,2} = 0$

c) $\rho_{1,2} = -0,5$.

Correction :

1.

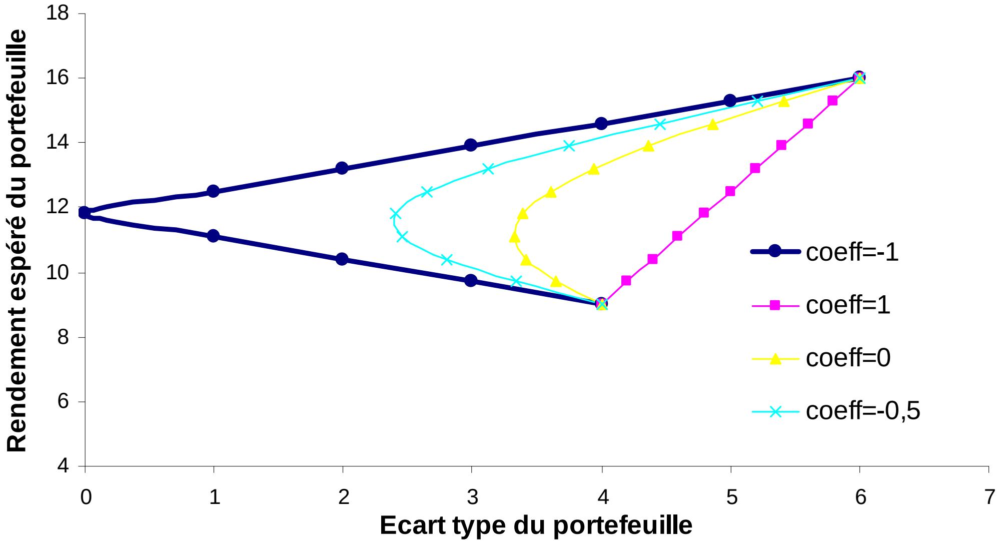
coeff. corrélation			1	-1	0	-0,5
x	(1 - x)	$E(R_P)$ en %	$\sigma(R_P)$ en %	$\sigma(R_P)$ en %	$\sigma(R_P)$ en %	$\sigma(R_P)$ en %
1	0	9,00	4,00	4,00	4,00	4,00
0,8	0,2	10,40	4,40	2,00	3,42	2,80
0,6	0,4	11,80	4,80	0,00	3,39	2,40
0,4	0,6	13,20	5,20	2,00	3,94	3,12
0,2	0,8	14,60	5,60	4,00	4,87	4,45
0	1	16,00	6,00	6,00	6,00	6,00

On utilise :

$$E(R_P) = E(xR_1 + (1-x)R_2) = xE(R_1) + (1-x)E(R_2)$$

$$V(R_p) = x^2V(R_1) + (1-x)^2V(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2)$$

2.



3.

Minimiser la variance du portefeuille revient à annuler sa dérivée par rapport à *x*.

$$V(R_p) = x^2V(R_1) + (1-x)^2V(R_2) + 2x(1-x)\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}V(R_P)}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xV(R_1)+2xV(R_2)-2V(R_2)+2\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1,R_2)$$
$$-4x\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1,R_2)=0$$

$$2xV(R_1)+2xV(R_2)-4x\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1,R_2)=2V(R_2)-2\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1,R_2)$$

$$x=\frac{2V(R_2)-2\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1,R_2)}{2V(R_1)+2V(R_2)-4\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1,R_2)}$$

$$\boxed{x=\frac{V(R_2)-\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1,R_2)}{V(R_1)+V(R_2)-2\boldsymbol{\sigma}(R_1)\boldsymbol{\sigma}(R_2)Corr(R_1,R_2)}}$$

coefficient de corrélation	x
-1	0,60
0	0,69
-0,5	0,63

Exercice 2 :

Soit trois actifs caractérisés par :

Titre	Rendement espéré en %	Ecart type en %
1	**15**	**6**
2	**7**	**2**
3	**21**	**12**

et les coefficients de corrélations suivants :

titre	1	2	3
1	**1**	**0,3**	**0,2**
2	**0,3**	**1**	**0,4**
3	**0,2**	**0,4**	**1**

Le taux sans risque est égal à 4% et les ventes à découvert sont autorisées.

1. Déterminez la composition du portefeuille de marché
2. Calculez l'équation de la frontière efficiente. Que représente cette droite ?
3. Pour obtenir un rendement espéré de votre portefeuille de 8%, comment le composez-vous ?

NB : L'écart type du rendement du portefeuille de marché est de 3,28%.

Correction :

1. Il convient de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 0,11 = 0,0036Z_1 + 0,00036Z_2 + 0,00144Z_3 \\ 0,03 = 0,00036Z_1 + 0,0004Z_2 + 0,00096Z_3 \\ 0,17 = 0,00144Z_1 + 0,00096Z_2 + 0,0144Z_3 \end{cases}$$

Pour obtenir :

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 = 24,11 \\ Z_2 = 36,61 \\ Z_3 = 6,95 \end{array}\right\} \sum_{i=1}^{3} Z_i = 67,68$$

soit :

X1	X2	X3	$E(R_M)$	$V(R_M)$
0,3563	0,5410	0,1027	11,29%	0,11%

2. Nous obtenons ainsi l'équation de la frontière efficiente : Elle représente pour chaque niveau de risque, le rendement espéré maximal que l'investisseur peut attendre.
Elle représente également pour chaque niveau de rendement espéré, le risque minimal que l'investisseur obtiendra.

$$E(R_P) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\boldsymbol{\sigma}(R_M)} \boldsymbol{\sigma}(R_P)$$

$$E(R_P) = 0,04 + 2,221\boldsymbol{\sigma}(R_P)$$

3. Il convient de résoudre :

$$8\% = x \times 4\% + (1-x) \times 11,29\%$$

E(Rp) cible	8%
Poids Rf	0,45

Ici x représente la part de l'actif sans risque dans le portefeuille total.

Le risque de ce portefeuille est mesuré par :

$$V(R_P) = (1-x)^2 \cdot V(R_M) = (0,55^2) \cdot (0,0011) = 0,03\%$$

et $\boldsymbol{\sigma}(R_P) = 1,8\%$

Exercice 3 : (mêmes données que l'exercice précédent)

Soit trois actifs caractérisés par :

Titre	Rendement espéré en %	Ecart type en %
1	**15**	**6**
2	**7**	**2**
3	**21**	**12**

et les coefficients de corrélations suivants :

titre	1	2	3
1	**1**	**0,3**	**0,2**
2	**0,3**	**1**	**0,4**
3	**0,2**	**0,4**	**1**

Il n'y a pas d'actif sans risque.

1) Donnez la composition des portefeuilles efficients d'espérance de rendement 0 et 1.
2) Donnez la structure du portefeuille efficient d'espérance de rendement 11,29%.
3) Donnez l'équation de la frontière efficiente
4) Un actif sans risque de rendement 4% est introduit, donnez l'équation de la nouvelle frontière efficiente.

Correction :

1)

La matrice des variances-covariances vaut :

$$\begin{pmatrix} 0,0036 & 0,0004 & 0,0014 \\ 0,0004 & 0,0004 & 0,001 \\ 0,0014 & 0,001 & 0.0144 \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice vaut :

$$\begin{pmatrix} 307,8276 & -241,8646 & -14,6585 \\ -241,8646 & 3166,2269 & -186,8953 \\ -14,6585 & -186,8953 & 83,37 \end{pmatrix}$$

Les termes constants valent :
A = 174,5
B = 14,62
C = 2670,6
D = 8593,5

Les proportions du portefeuille efficient d'espérance de rendement nulle sont :

$$X = g = \frac{B\Omega^{-1}\overline{1} - A\Omega^{-1}\overline{R}}{D} = \begin{bmatrix} -0.444 \\ 1.6903 \\ -0.2463 \end{bmatrix}$$

Les proportions du portefeuille efficient d'espérance de rendement égale à un sont :

$$X = g + h = \frac{B\Omega^{-1}\overline{1} - A\Omega^{-1}\overline{R}}{D} + \frac{C\Omega^{-1}\overline{R} - A\Omega^{-1}\overline{1}}{D} = \begin{bmatrix} 6,6455 \\ -8,4909 \\ 2,8454 \end{bmatrix}$$

2) La structure du portefeuille efficient d'espérance de rendement 11,29% est donné par :

$$X = g + 0,1129h = \begin{bmatrix} 0,3564 \\ 0,5408 \\ 0,1028 \end{bmatrix}$$

On retrouve le portefeuille obtenu à l'exercice précédent avec un actif sans risque.

3) Nous devons trouver une équation du second degré du type :

$$V(R_P) = aE(R_P)^2 + bE(R_P) + c$$

Les trois points des trois portefeuilles se situant sur la frontière efficiente vont nous permettre de trouver les trois coefficients *a*, *b* et *c*.

Le risque de chacun des trois portefeuilles précédents se calculent par le produit matriciel suivant : $X^T \Omega X$.

$$V(R_0) = 0,0017013$$
$$V(R_1) = 0,27186$$
$$V(R_{0,1129}) = 0,0010774$$

Ainsi

Le système à résoudre est le suivant:

$$\begin{cases} 0 \times a + 0 \times b + c = 0,0017013 \\ a + b + c = 0.27186 \\ 0,1129^2 \times a + 0,1129 \times b + c = 0,0010774 \end{cases}$$

On en déduit que l'équation de la frontière efficiente s'écrit :

$$V(R_P) = 0,31077E(R_P)^2 - 0,040612E(R_P) + 0,001701$$

4) Nous devons trouver l'équation de la droite d'ordonnée à l'origine R_f tangente à la frontière efficiente sans actif sans risque.

Cette équation est de la forme :

$$E(R_P) = 0,04 + \boldsymbol{\beta\sigma}(R_P)$$

Nous l'incorporons dans l'équation de la frontière efficiente :

$$V(R_P) = 0,31077\left[0,04 + \boldsymbol{\beta\sigma}(R_P)\right]^2 - 0,040612\left[0,04 + \boldsymbol{\beta\sigma}(R_P)\right] + 0,001701$$

Après simplification :

$$V(R_P) = 0,31077\left[0,0016 + 0,08\boldsymbol{\beta\sigma}(R_P) + \boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{\sigma}^2(R_P)\right] - 0,040612\left[0,04 + \boldsymbol{\beta\sigma}(R_P)\right] + 0,001701$$

$$(0,31077\boldsymbol{\beta}^2 - 1)\boldsymbol{\sigma}^2(R_P) - 0,0157504\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\sigma}(R_P) + 0,000573752 = 0$$

Le point de tangence est obtenu lorsque la racine de l'équation précédente est double c'est-à-dire lorsque $\Delta = 0$.

$$\Delta = -0,00046514\boldsymbol{\beta}^2 + 0,002295008 = 0$$

$$\boldsymbol{\beta} = 2,221$$

L'équation de la frontière efficiente est identique à celle obtenue dans l'exercice précédent :

$$E(R_P) = 0,04 + 2,221\boldsymbol{\sigma}(R_P)$$

Nous pouvons représenter ces deux frontières efficientes dans un plan espérance-écart type.